1808.

12 n

~~Math. P.~~

~~Bot~~

Lithogr. 70

M. Heuer

12

70

Anleitung

zur

Geometrie

für

Künstler und Werkleute

mit vorzüglicher Hinsicht

auf die Baukunst, und die damit verwandten Künste.

Von

Hermann Mitterer,

öffentlichen Lehrer der Zeichnungskunst am königlichen Gymnasium, und der bürgerlichen Feyertagsschule in München.

Mit im Contexte beygedruckten lithographischen Figuren.

München, 1809.

In Commission bey Jos. Lentner, Buchhändler.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Vorrede.

Bey der großen Anzahl geometrischer Werke, die seit einiger Zeit für den Unterricht des gemeinen Mannes erschienen sind, scheint ein neues Werk dieser Art ganz entbehrlich zu seyn. Allein der meiste Theil dieser Lehrbücher beschäftigt sich außer den gewöhnlichen Lehrsätzen grösten Theils nur mit der gemeinen Feldmeßkunst. Auf die Bedürfnisse der technischen Kunstfächer, und vorzüglich der Baukunst wurde wenig oder gar keine Rücksicht genommen. Bey meinem vieljährigen öffentlichen Unterrichte in der Zeichnungskunst für Künstler und Werkleute aller Art lernte ich ih-

re Bedürfnisse genau kennen, und ordnete in diesem Werke die Gegenstände so, wie ich glaubte, daß sie zur Anwendung in den Kunstfächern am bequemsten wären, wodurch einige Aenderungen in dem gewöhnlichen Gange der Geometrie entstanden.

Bey der Erklärung des Maaßes fand ich für nöthig das neue französische Maaß mit den dazu gehörigen Reduktionen beyzufügen, weil bereits sehr wichtige Kunstwerke nach diesem Maaße erschienen sind, wozu vorzüglich die vom Dürand, Professor der Baukunst bey der polytechnischen Schule in Paris, gehören. Die Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzel setzte ich dahin, wo ich glaubte, daß der Nutzen und die Nothwendigkeit davon am beßten eingesehen würde. In dem Anhange wurden alle diejenigen Operationen zusammen gestellt, welche vorzüglich in der Baukunst am öftesten vorkommen; aber ohne Theorie, und bloß praktisch, weil sich sonst das Werk zu sehr ausgedehnt, und ganz andere Vorkenntnisse erfordert hätte, als man ge-

wöhnlich bey Künstlern und Werkleuten fördern kann.

Anstatt der bey andern geometrischen Werken am Ende angehängten Tabellen, ließ ich die Figuren zu mehrerer Bequemlichkeit im Contexte beydrucken; bediente mich aber anstatt der sonst gewöhnlichen Holzschnitte, der Steinabdrücke, wodurch eine viel größere Reinheit in denselben hervorgebracht wurde. Da ich glaube, diese so vortreffliche Erfindung in meinem Vaterlande zuerst auf den Unterricht in den verschiedenen Kunstfächern angewandt zu haben, so wollte ich auch zu diesem Gebrauche einen Versuch nicht unterlassen, der in der Folge vielleicht noch für andere Gegenstände mit Nutzen angewandt werden könnte.

Uebrigens hoffe ich wird der Künstler und Werkmann ohne andere Vorkenntnisse, als die der vier Rechnungsarten, und der reesischen Regel, oder der Regel Detri in diesem Werke die nöthigsten Gegenstände der Geometrie, und diejenigen Operationen sich eigen

machen können, die er oft mit so vielem Verlangen in andern geometrischen Werken vergebens sucht, wodurch mein Bemühen, etwas zum Nutzen des Kunstwesens beyzutragen, vollkommen erreicht wird.

München den 1sten Oktober 1808.

Der Verfasser.

Inhalt.

	Seite.
Erklärungen über die Gegenstände der Geometrie	1
Von den Linien	2
Von den Winkeln	5
Von den Flächen	9
Aufzeichnung der Linien Winkel und Flächen	14
Von dem Längenmaaße	31
Von den verjüngten Maaßstäben	38
Von den Grundsätzen	42
Zeichen, die in der Geometrie gebraucht werden	43
Die nöthigsten Lehrsätze	44
Die nöthigsten Lehrsätze vom Kreise	61
Von der wirklichen Ausmessung der Linien, Winkel und Flächen auf dem Felde oder Bauplatze	77
Von der Verwandlung der Figuren	102
Von der Ausrechnung der Flächen	111
Von der Aähnlichkeit der Figuren und ihren Verhältnissen	134
Von der Vertheilung der Flächen	152
Von der Ausziehung der Quadratwurzel	158
Von den geometrischen Körpern oder von der Stereometrie	170
Von der Aufzeichnung und Ausmessung der Körper	177
Lehrsätze der Stereometrie	185
Von der Ausrechnung der Körper	201
Entwicklung der Oberflächen der Körper, oder Zeichnung der Körpernetze	231

Inhalt.

Von der Ausrechnung der Oberflächen der Körper 241
Von dem Walzenschnitte und seiner Anwendung auf die Ausrechnung der Gewölber 244
Von der Verwandlung der Körper . 260
Von der Ausziehung der Kubikwurzel . 236

Anhang.

Von dem Aufzeichnen verschiedener gedruckter Bögen und anderer Linien, die in der Baukunst und den technischen Künsten vorkommen . . 272
Von den vorzüglichsten Linien, welche entstehen, wenn Körper von Flächen durchschnitten werden . . . 285
Von den vorzüglichsten Linien, welche entstehen, wenn Körper von andern Körpern durchschnitten werden . . 307
Von der Beschreibung einiger Linien, auf den gebogenen Oberflächen der Körper 320

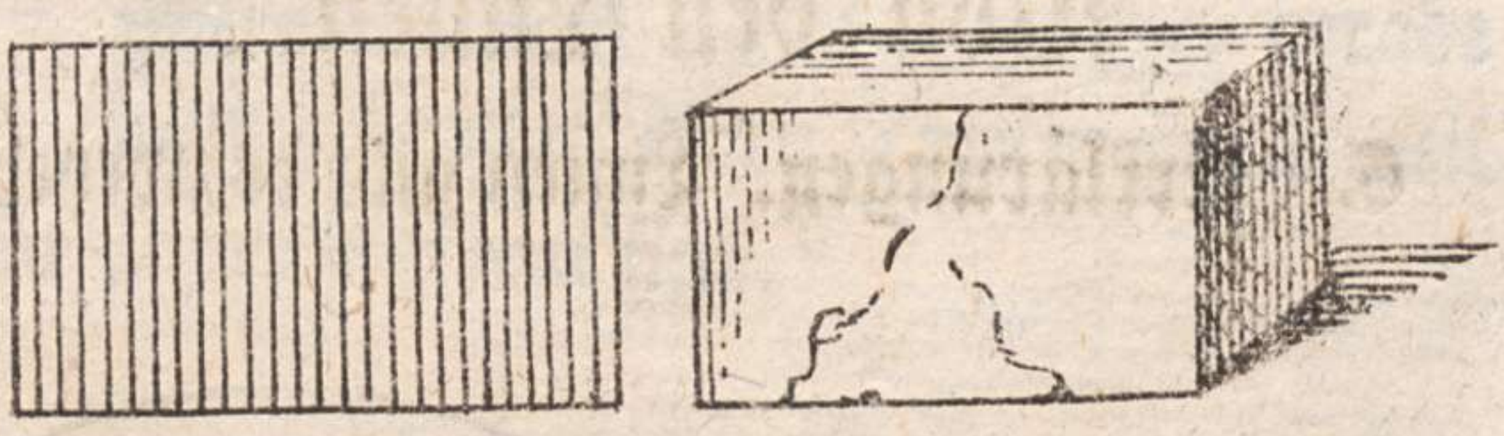
Geometrie.

Erklärungen über die Gegenstände derselben.

1. Die Geometrie ist eine Wissenschaft, welche von der Größe und Ausmessung der Linien, Flächen und Körper handelt.

2. Betrachtet man eine Sache bloß nach ihrer Länge, so hat man eine Linie.

Betrachtet man sie nach ihrer Länge und Breite, so hat man eine Fläche.



Kömmt zur Länge und Breite auch noch die Dicke, Höhe oder Tiefe; so gibt dieß einen Körper.

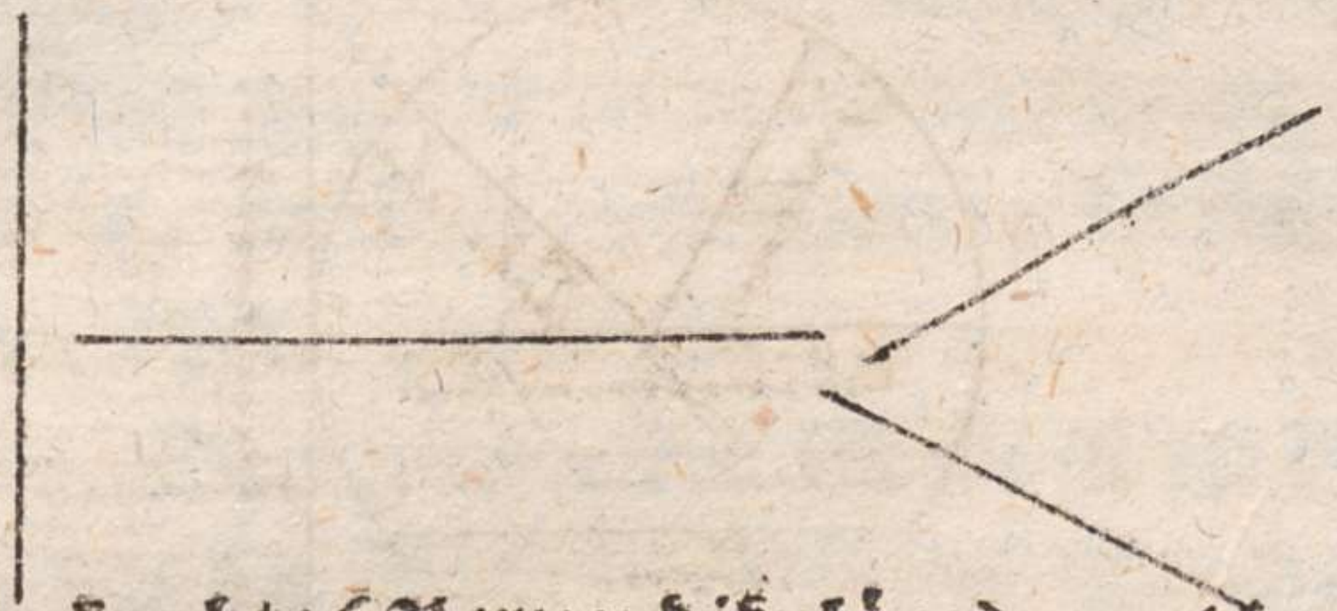
3. Linien, Flächen und Körper sind also die Gegenstände der Geometrie.

4. Die Gränze einer Linie ist der Punkt, welcher mathematisch betrachtet gar keine Ausdehnung hat. Eben so hat auch die mathematische Linie gar keine Dicke, und ist bloß die Gränze einer Fläche; und die Fläche im nähmlichen Sinne die Gränze eines Körpers. Sie können also nur in unserer Vorstellung bestehen; aber nicht wirklich gezeichnet werden. Daher diejenigen Linien und Punkte, die wir auf dem Papiere bemerken, bloße Zeichen der mathematischen Linien und Punkte sind.

5. Die Ausmessung der Linien nennt man die **Longimetrie**; die Ausmessung der Flächen die **Planimetrie**; und die Ausmessung der Körper die **Stereometrie**. Wir werden zuerst von den Linien und Flächen, weiter unten aber von den Körpern handeln.

Von den Linien.

6. **Erklärungen.** Linien gibt es zweyerley: **Gerade und krumme.** Die geraden erhalten nach ihrer Lage verschiedene Benennungen, als:



Senkrechte (Perpendikuläre), welche nach der Richtung des Senkbleyes gezogen werden, und sich weder mehr zur rechten noch linken Seite wenden.

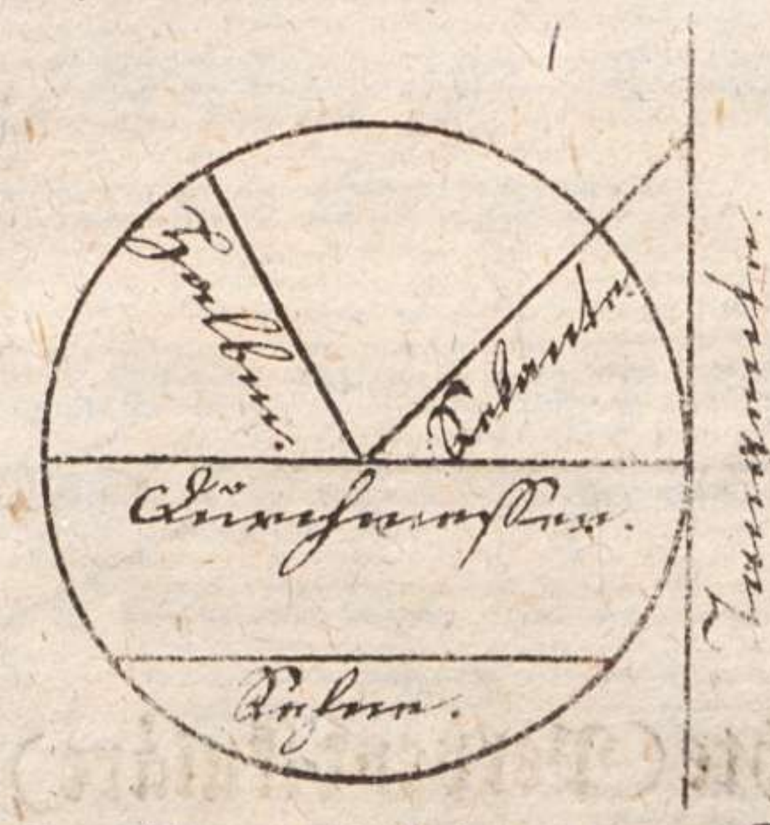
Wagerechte (Horizontale), die nach der Richtung des Wagebalkens sich weder mehr aufwärts noch abwärts neigen.

Schiefe, die eine Neigung seitwärts, auf- oder abwärts haben.

---

7. **Parallellinien** nennt man zwey gerade Linien, welche in allen ihren Theilen gleich weit von ein ander entfernt sind.

8. **Krumme Linien** gibt es vielerley, wovon aber nur die **Kreislinie** in der Elementar-Geometrie vorkömmt; wo sie zur Zeichnung der meisten Figuren gebraucht wird.



9. Der **Kreis** entsteht, wenn sich ein Punkt um einen andern festen Punkt in beständig gleicher Entfernung herumbewegt.

Der feste Punkt ist der **Mittelpunkt** (Zentrum); die beschriebene krumme Linie wird der **Umkreis** (Peripherie); und diejenige, die von dem Mittelpunkte bis an den Umkreis gezogen wird, der **Halbmesser** (Radius) genannt. Jede gerade Linie, die von einem Punkte des Umkreises zu einem andern Punkte desselben gezogen wird, heißt eine **Sehne** (Korde). Geht eine solche Linie durch den Mittelpunkt, so hat man die größte **Sehne**, oder den **Durchmesser** (Diameter). Jede Linie, die den Umkreis berührt, nennt man eine **Berührungslinie** (Tangente), und diejenige, welche, wenn sie verlängert wird, die Tangente schneidet, eine **Schneidlinie** (Sekante). Ein Theil des Umkreises, er mag groß oder klein seyn, wird ein **Bogen** genannt. Der vierte Theil eines Kreises heißt ein **Quadrant**, und der sechste ein **Sextant**.

10. Den **Umkreis** theilt man in der Geo-

metrie in 360 Theile, die man Grade nennt. Ein jeder Grad wird wieder in 60 Theile, die man Minuten, und diese in 60 andere, die man Sekunden nennt, eingetheilt.

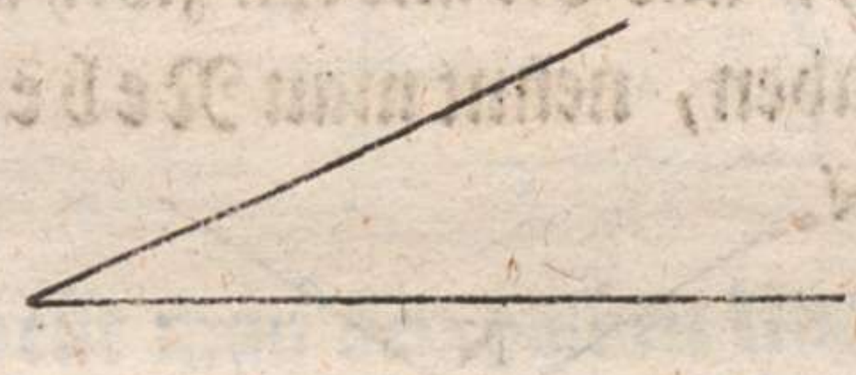
11. Das Zeichen der Grade ist ein kleines Null; das der Minuten ein kleiner Strich, und das der Sekunden, sind zwey Striche.

40° 10′ 9″

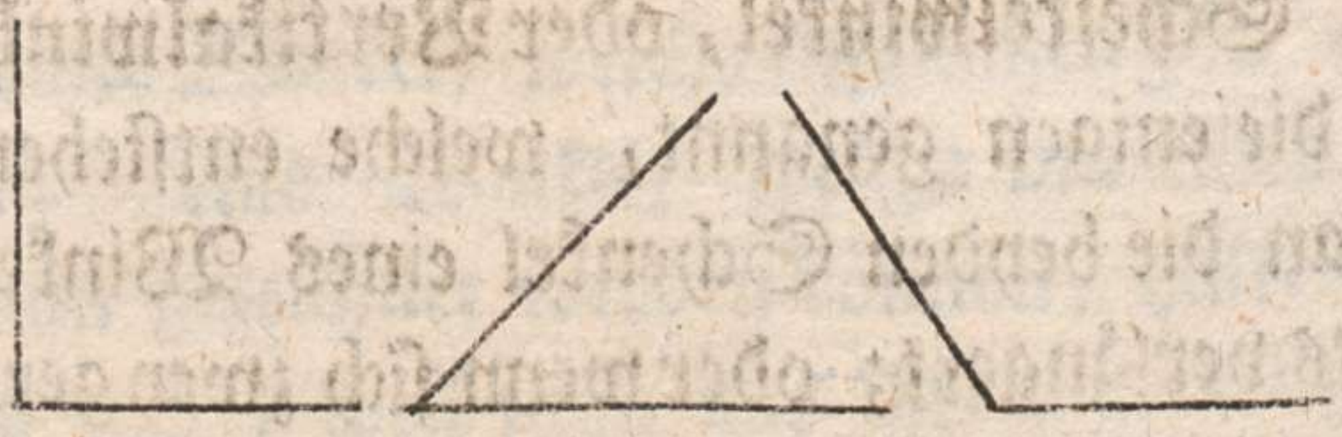
Vierzig Grade, zehn Minuten, neun Sekunden.

Von den Winkeln.

12. Erklärungen. Wenn zwey Linien zusammen stossen, so machen sie bey ihrem Zusammenstossungs-Punkte einen Winkel.

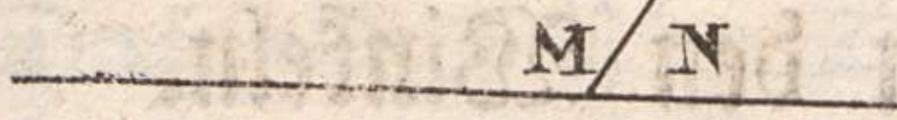


Die zwey zusammen stossenden Linien nennt man Schenkel; und den Punkt, wo sie zusammenstossen, den Scheitel.



Winkel gibt es dreyerley, rechte, spitzige und stumpfe. Stößt eine gerade Linie

so auf eine andere, daß sie sich weder mehr zur rechten, noch zur linken Seite wendet; so gibt dieses einen **rechten** Winkel, welches allemal geschieht, wenn eine Senkrechte auf eine Wagerechte stößt. Ist der Winkel größer, als ein rechter; so nennt man ihn einen **stumpfen**; ist er aber kleiner als ein rechter, so wird er ein **spitziger** Winkel genannt.

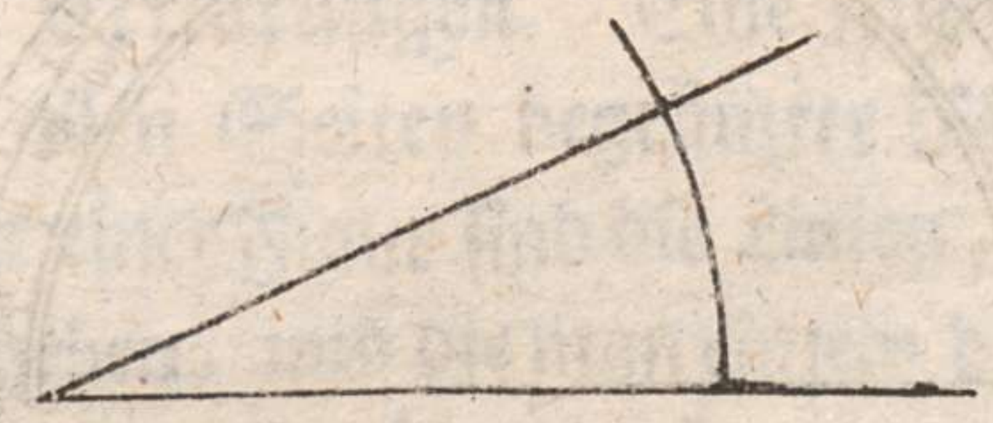


13. Zwey Winkel, die einen Schenkel gemeinschaftlich, und die andern zwey auf einer geraden Linie haben, nennt man **Nebenwinkel**, wie M und N.

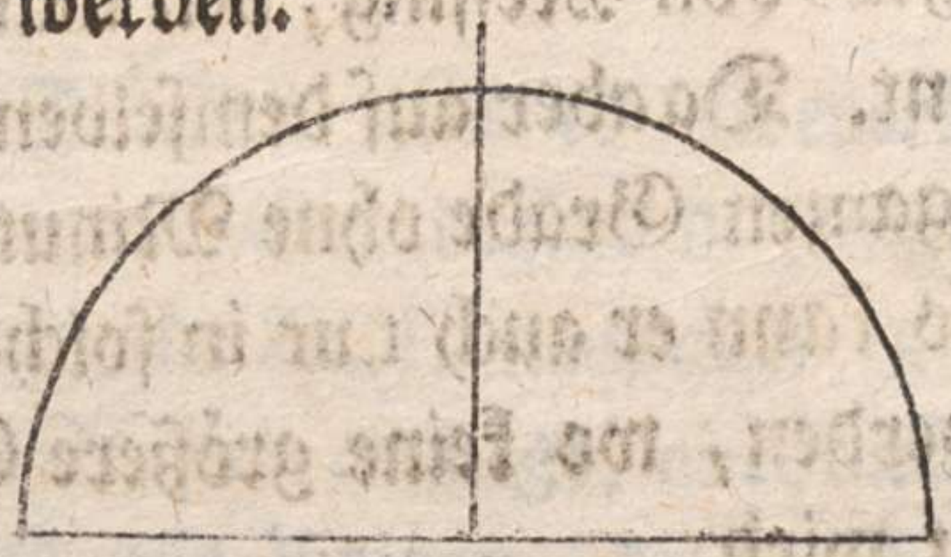
14. **Scheitelwinkel**, oder **Vertikalwinkel** werden diejenigen genannt, welche entstehen, wenn man die beyden Schenkel eines Winkels rückwärts verlängert; oder wenn sich zwey gerade Linien einander durchschneiden. So sind M und O, N und X Scheitelwinkel.

15. Bey der Größe eines Winkels kömmt

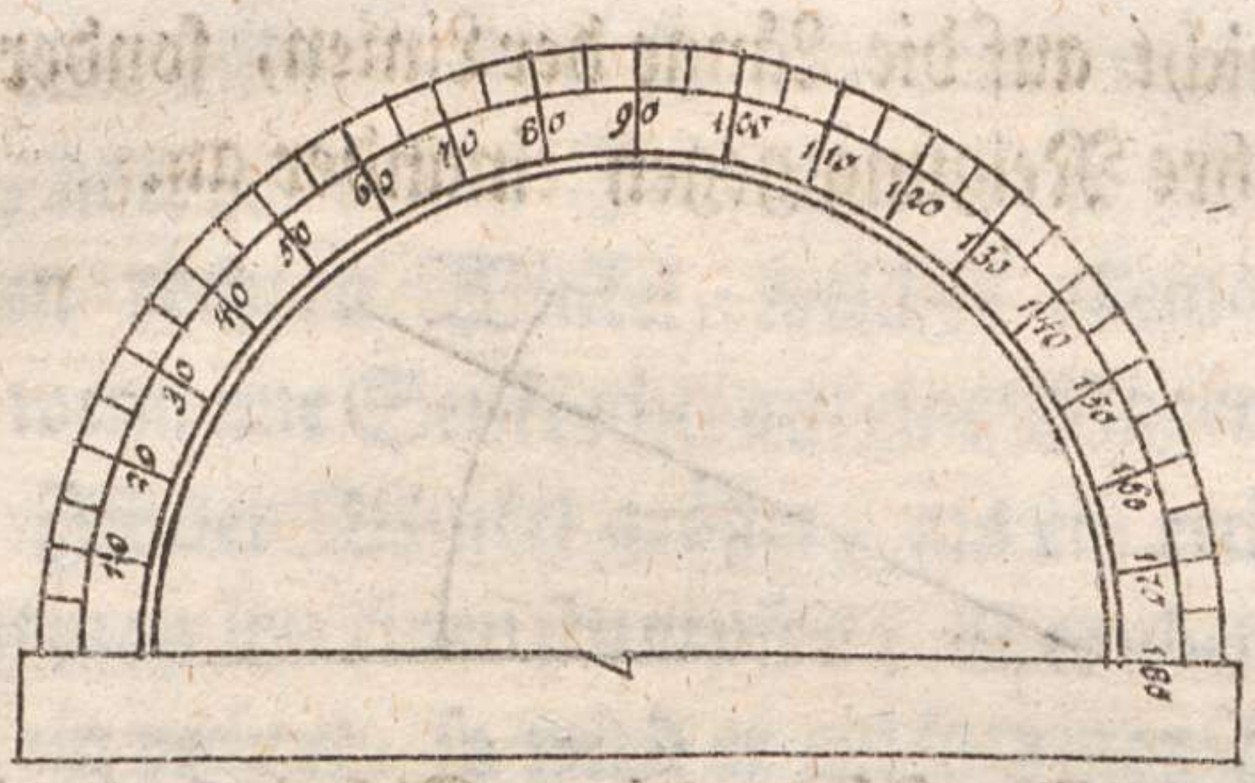
es nicht auf die Länge der Linien, sondern bloß auf ihre Neigung gegen einander an.



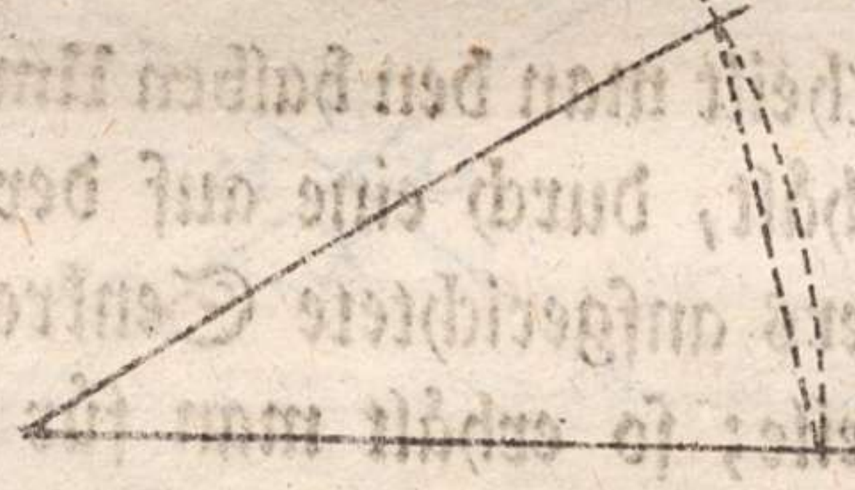
16. Da sich aus dem Scheitel eines jeden Winkels ein Bogen beschreiben läßt; so kann das Maaß eines Winkels nach der Anzahl der Grade, welche er auf dem Umkreise einnimmt, bestimmt werden.



17. Theilt man den halben Umkreis, welcher 180° hält, durch eine auf der Mitte des Durchmessers anfgerichtete Senkrechte in zwey gleiche Theile; so erhält man für den rechten Winkel 90°. Der ganze Umkreis enthält also 4 rechte Winkel, welche zusammen 360° ausmachen. Alle Winkel, welche um einen Punkt herum gezeichnet werden können, halten gleichfalls 360°, weil man aus ihrem gemeinschaftlichen Scheitelpunkte eine Kreislinie beschreiben kann, die ihnen allen miteinander zum Maaße dienet.



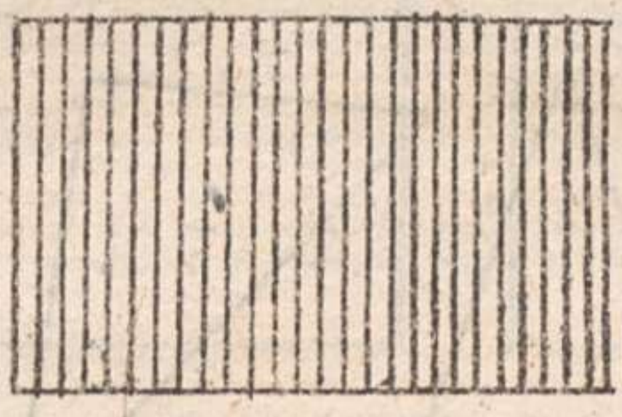
18. Um die Winkel nach der Anzahl ihrer Grade auf das Papier aufzutragen, bedienet man sich eines in seine Grade eingetheilten halben Kreisbogens von Messing, den man **Transporteur** nennt. Da aber auf demselben gewöhnlich nur die ganzen Grade ohne Minuten angezeigt sind; so kann er auch nur in solchen Fällen gebraucht werden, wo keine größere Genauigkeit erfordert wird.



19. Zieht man von den beyden Endespunkten des Bogens eine Sehne; so bestimmt auch diese die Größe des Winkels. Weiß man also die Länge der beyden Schenkel oder Halbmesser, und die Länge der Sehne; so kann der Winkel auch ohne Gradinstrumente genau aufgetragen werden.

Von den Flächen.

20. **Erklärungen.** Eine **Flächenfigur** ist ein von allen Seiten begränzter Raum. Die **Gränzen** einer Figur sind die Linien, welche dieselbe umgeben, und die man einzeln die **Seiten**, alle zusammen aber den **Umfang** nennet.



21. **Flächen** gibt es zweyerley, **gerade** und **krumme.** Gerade sind diejenigen, auf welchen jede gerade Linie, nach allen Richtungen, in allen ihren Theilen aufliegt, oder dieselbe berührt; krumm sind alle übrigen, die bauchigt oder hohl sind, wie die einer Kugel, Walze oder Röhre.

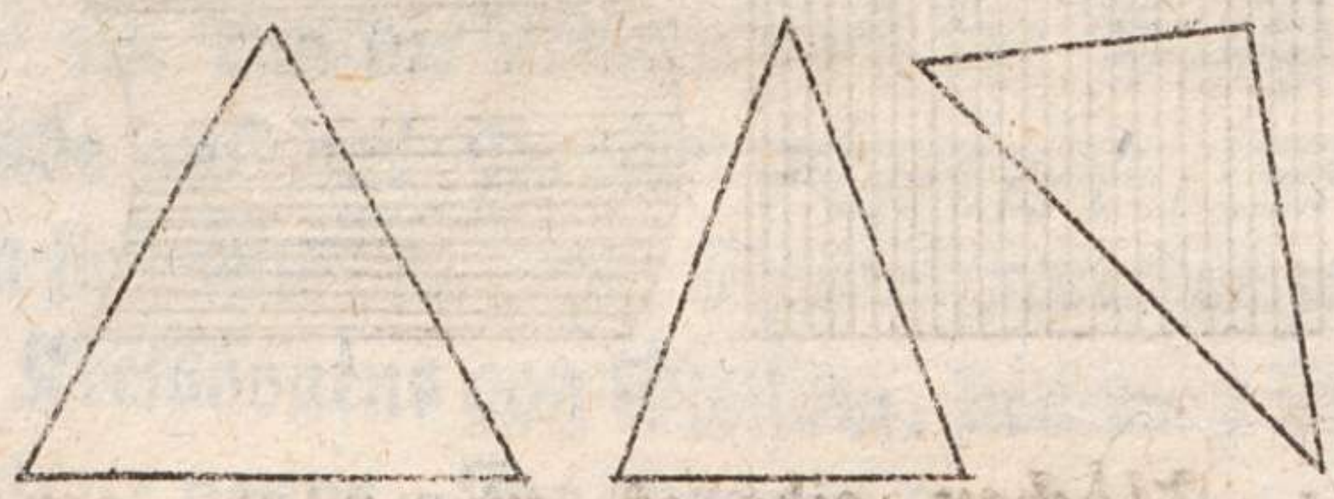
22. Die geraden Flächenfiguren werden entweder mit geraden oder krummen Linien eingeschlossen.

23. Um einen Raum mit geraden Linien einzuschließen, muß man wenigstens drey dieser Linien haben, die auch zugleich drey Winkel bilden.

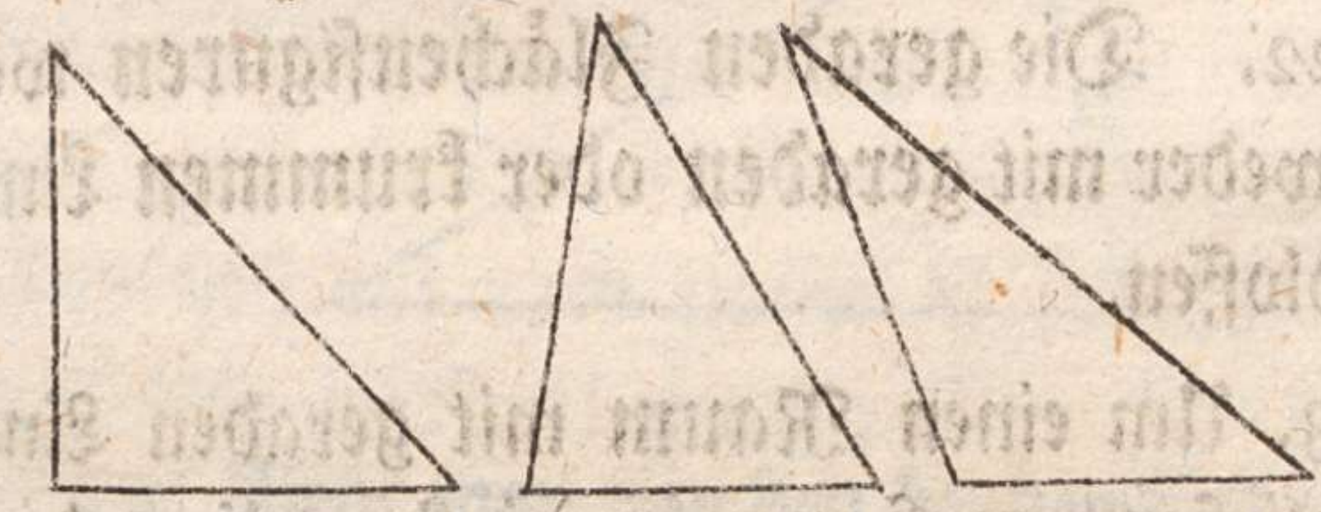
24. Jede Figur hat so viele Seiten, als sie Winkel hat. Von der Anzahl dieser Winkel oder Ecken erhalten verschiedene Gattungen von Figuren ihre Nahmen. Ist die Figur von drey

Linien und Winkeln umgeben; so wird sie ein Dreyeck, von vier ein Viereck, von fünf ein Fünfeck, u. s. w. genannt.

25. Da man in jedem Dreyecke drey Seiten und drey Winkel bemerkt; so gibt es dreyerley in Rücksicht der **Seiten**, und **dreyerley** in Rücksicht der **Winkel**.



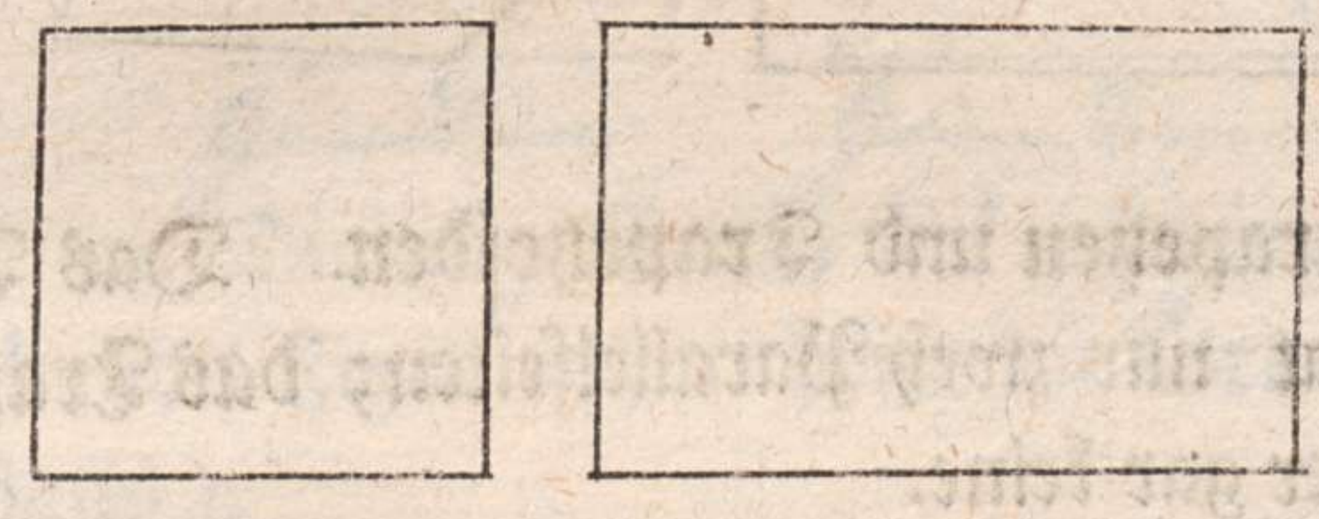
In Rücksicht der Seiten. Sind die drey Seiten einander gleich, so nennt man es ein **gleichseitiges** Dreyeck; sind nur zwey Seiten einander gleich, ein **gleichschenklichtes**; sind alle drey Seiten ungleich, ein **ungleichseitiges** Dreyeck.



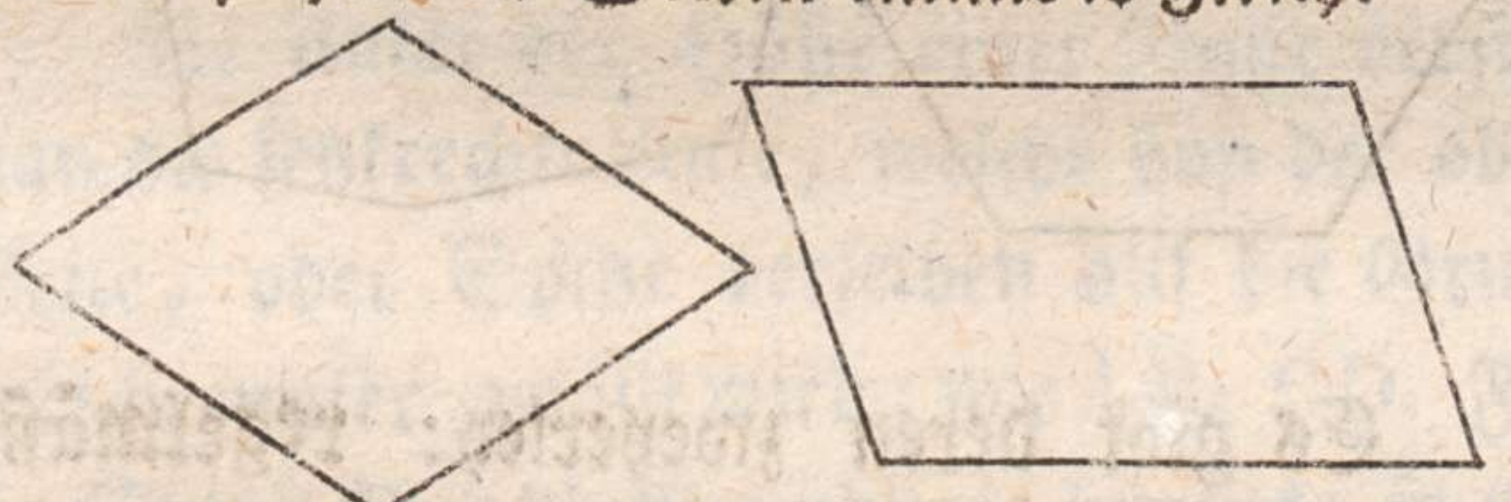
In Rücksicht der Winkel. Ist in dem Dreyecke ein rechter Winkel, so heißt dasselbe ein **rechtwinklichtes**; befinden sich darin drey spitzige, so wird es ein **spitzwinklichtes**, und enthält es einen stumpfen Winkel, ein **stumpfwinklichtes** Dreyeck genannt.

26. In dem rechtwinklichten Dreyecke erhalten die Seiten bestimmte Nahmen: die Seite, welche dem rechten Winkel gegenüber steht, heißt die **Hypothenuse**; die übrigen zwey Seiten nennt man Lothen, oder Katheten.

27. Vierecke gibt es sechserley, als:



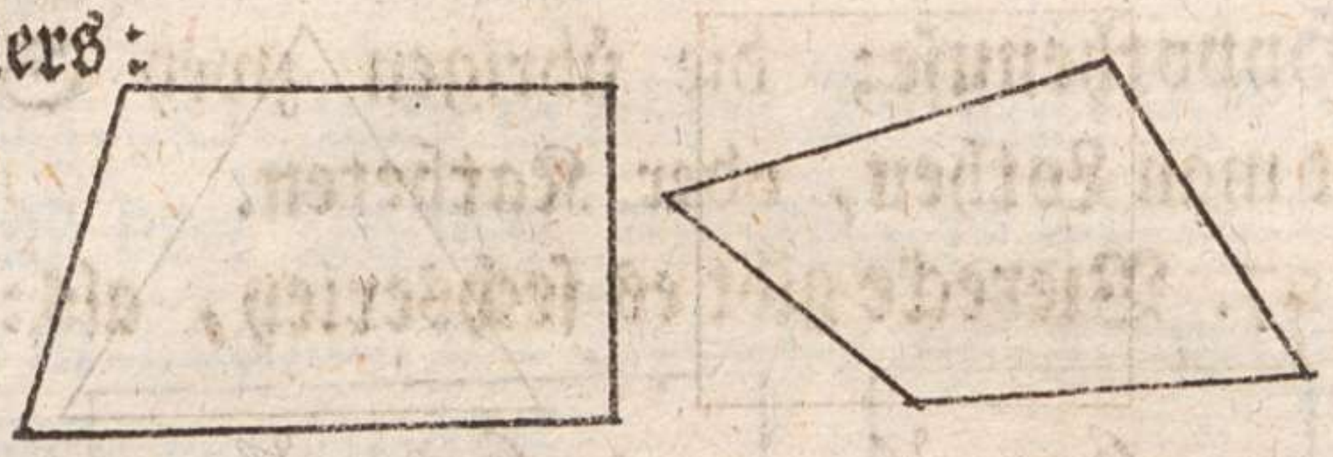
Quadrate und Rechtecke. Ein Quadrat hat vier rechte Winkel, und vier gleiche Seiten. Ein Rechteck oder länglichtes Viereck hat ebenfalls vier rechte Winkel; aber nur die zwey gegenüber stehenden Seiten einander gleich.



Gleichseitige und länglichte Rauten. Die gleichseitige Raute (Rhombus) ist ein verschobenes Quadrat, und hat vier gleiche Seiten; aber nur die zwey gegenüber stehenden Winkel einander gleich. Die länglichte Raute (Rhomboid) ist ein verschobenes Rechteck, und hat sowohl die gegenüber stehenden Seiten, als Winkel einander gleich.

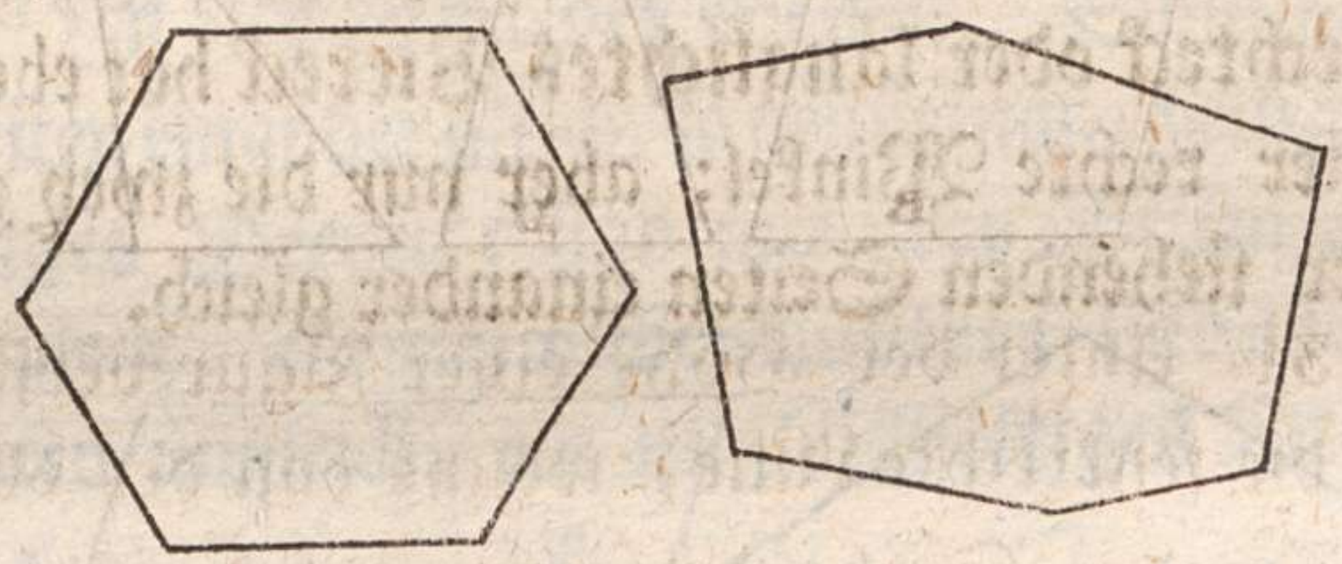
Diese vier Arten von Vierecken werden Parallellogramme genannt; weil die gegenüberstehenden Seiten mit einander parallel laufen.

Ferners:

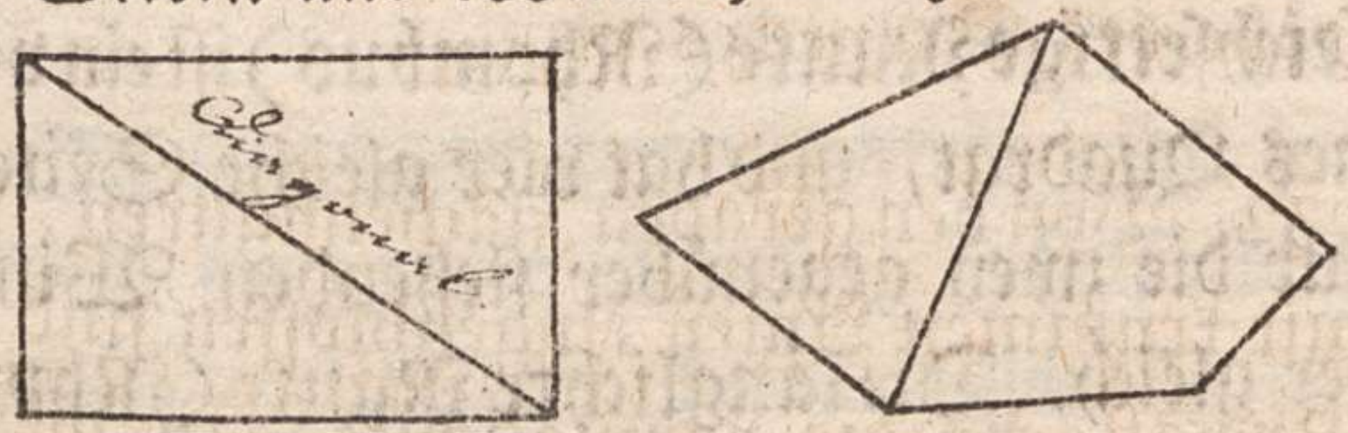


Trapetzen und Trapetzoiden. Das Trapetz hat nur zwey Parallelseiten; das Trapetzoid aber gar keine.

28. Alle Figuren, die mehr als vier Seiten haben, nennet man Vielecke (Poligone).



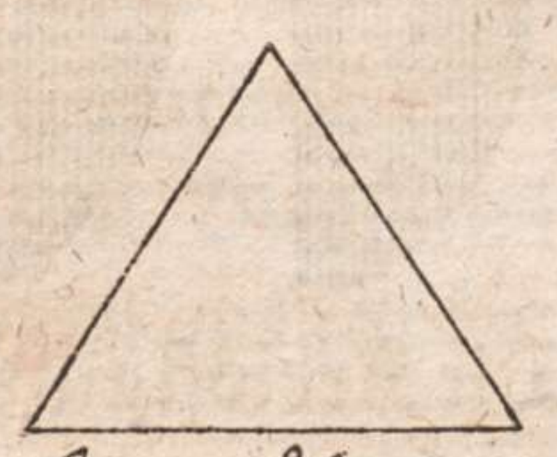
Es gibt deren zweyerley: regelmäßige und unregelmäßige; die ersten haben lauter gleiche Seiten und Winkel; die zweyten aber nicht.



29. Zieht man von einem Winkel eines Viereckes oder Vieleckes eine Linie in den gegen-

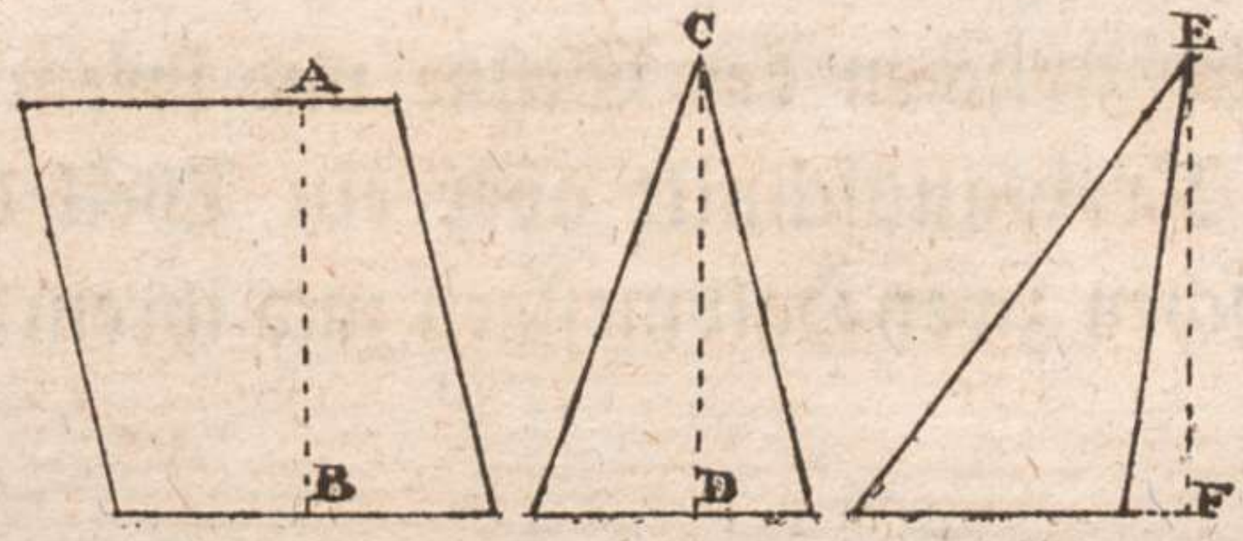
über stehenden; so wird diese die Diagonallinie genannt.

Grundlinie



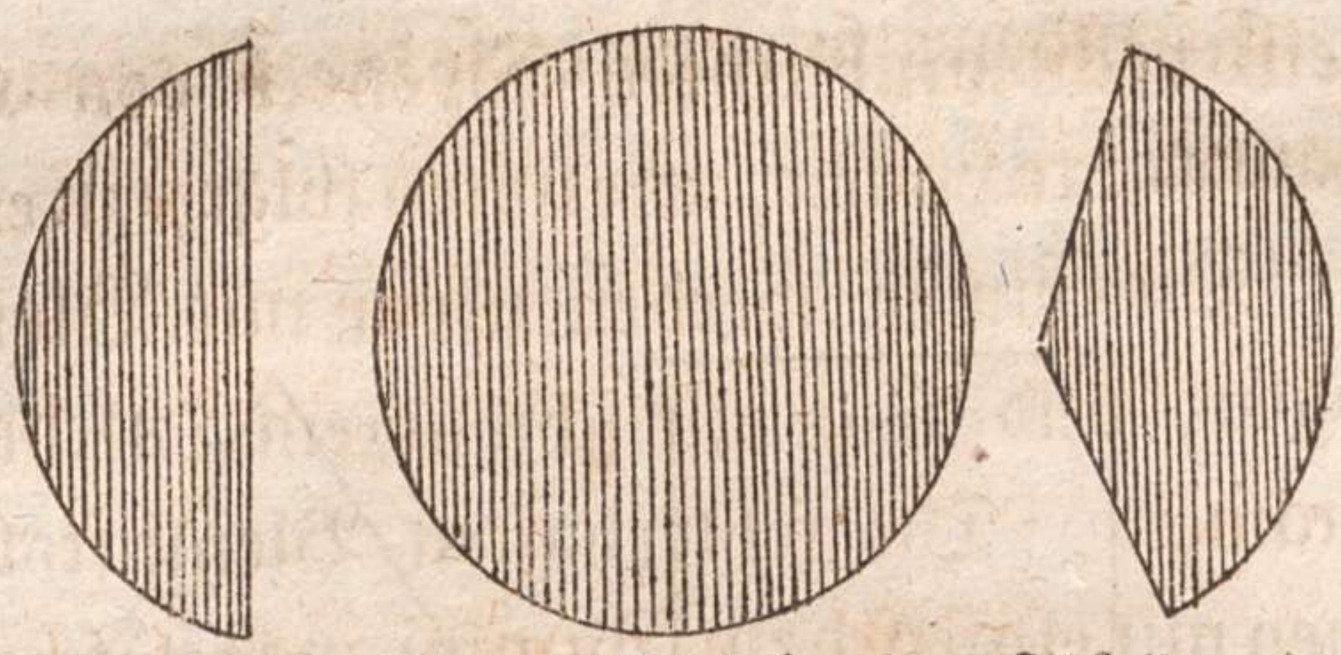
Grundlinie

30. Diejenige Seite, auf welcher eine geradlinichte Figur steht, heißt die Grundlinie (Basis):



31. Unter der Höhe einer Figur versteht man die senkrechte Linie, welche von der obern Seite, oder Spitze derselben auf die Grundlinie herunter gefällt wird, wie A B; C D. Fällt die Spitze über die Grundlinie hinaus; so muß diese verlängert werden, wie bey F, wo E F die Höhe des Dreyeckes ist.

32. Von den geraden Flächenfiguren, welche mit krummen Linien eingeschlossen sind, ist die Kreisfläche die vorzüglichste, zu welcher noch der Kreisabschnitt, und der Kreisausschnitt kömmt.



Die Kreisfläche ist diejenige Fläche, welche von einer ganzen Kreislinie begränzt ist. Der Anfänger soll diese Fläche wohl von der Kreislinie oder dem Umkreise unterscheiden.

Der Kreisabschnitt ist ein Theil der Kreisfläche zwischen der Sehne und ihrem Bogen; der Kreisausschnitt aber ein Theil derselben zwischen zwey Halbmessern und ihrem Bogen.

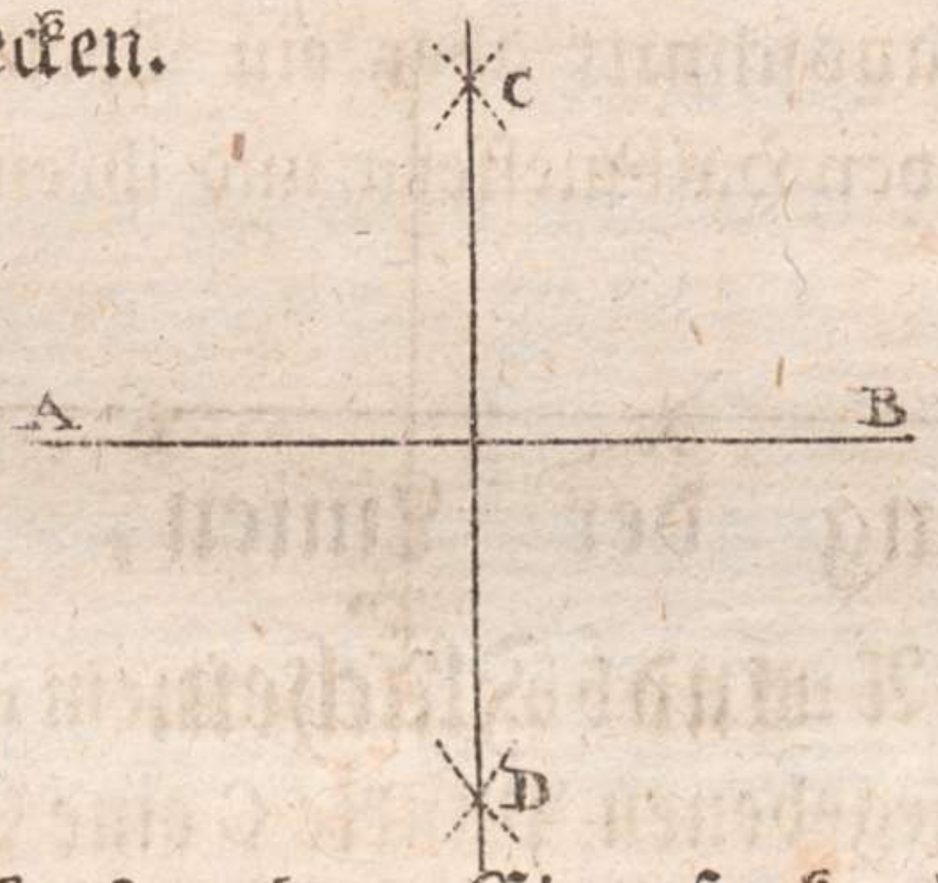
Zeichnung der Linien, Winkel und Flächen.

33. Anmerkung. Bey der Zeichnung dieser Gegenstände hat man einen guten Theilzirkel, einen Einsatz- oder Stockzirkel, in welchen man ein Bleyrohr mit seinem Bleystifte einsetzen kann, und ein Paar Reißfedern nöthig, wovon eine in den Einsatzzirkel, um krumme Linien zu ziehen, die andere aber zum Zeichnen gerader Linien gebraucht wird. Zu diesem kömmt noch ein gutes Lineal, und et-

wa ein rechtwinklichtes Dreyeck von Holz, um senkrechte Linien, wie unten folgt, zu errichten. Die Linien werden zuvor mit Bleystift gezogen, und dann mit schwarzem Tusche ausgezeichnet. Die fehlerhaften Bleystiftslinien können mit elastischem Gummi ausgelöscht werden.

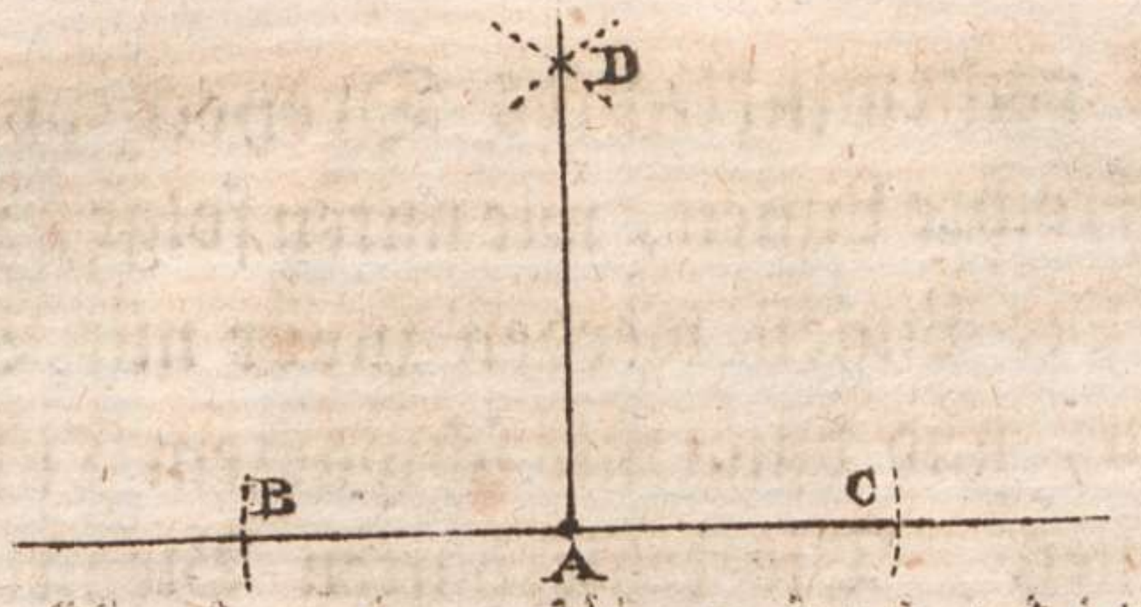
34. Aufgabe. Ein Lineal zu prüfen.

Man ziehe damit eine feine Linie, und lege die nähmliche Seite des Lineals, nach welcher man die Linie gezogen hat, oberhalb an dieselbe; so werden sich diese, wenn das Lineal gerade ist, einander decken.



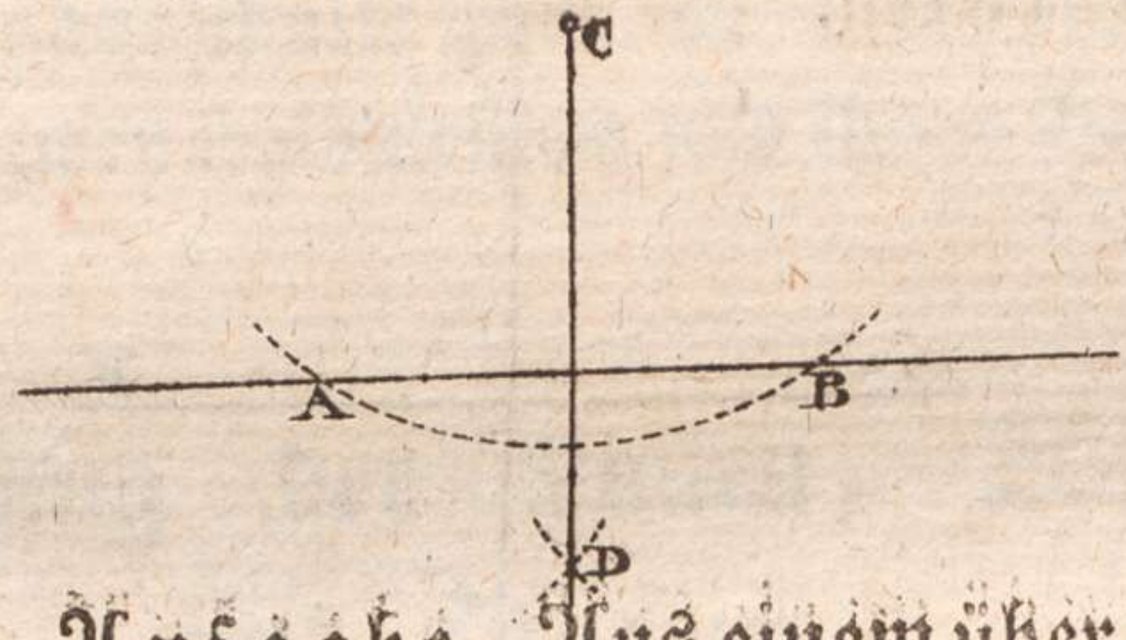
35. Aufgabe. Eine senkrechte Linie auf eine wagerechte so zu errichten, daß sie diese in zwey gleiche Theile zertheilet.

Man ziehe die Linie AB, die man als eine horizontale annimmt; setze den Zirkel in die Endespunkte A und B, und mache oben bey C und unten bey D Kreuzbogen, durch welche die Linie CD gezogen wird, die senkrecht auf AB steht, und diese in zwey gleiche Theile zertheilet



36. Aufgabe. Eine senkrechte Linie auf einem bestimmten Punkte A zu errichten.

Man setze den Zirkel in A, und mache zwey Abschnitte in B und C, auf welche der Zirkel eingesetzt, die Kreuzbogen oben bey D gezogen, und die senkrechte Linie A D auf dem bestimmten Punkte A errichtet wird.



37. Aufgabe. Aus einem über der Linie A B gegebenen Punkte C eine Senkrechte zu fällen.

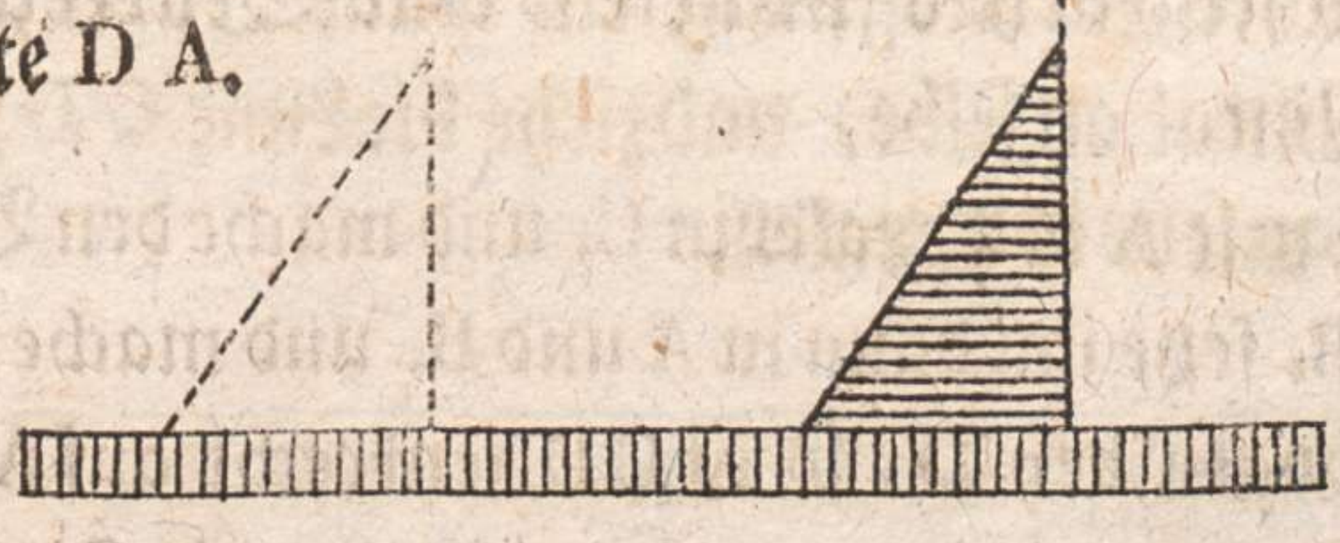
Man setze den Zirkel in C, und mache den Bogen A B, setze ihn dann in A und B, und mache die Kreuzbogen bey D; so ist C D senkrecht auf A B.

Da in den drey obigen Fällen die Zirkelöffnungen zu den Kreuzbogen überall gleich sind; so kann sich die durch selbe gezogene Linie weder mehr zur rechten noch zur linken Seite wenden, und ist also überall senkrecht.

38. **Anmerkung.** Die Gründe der nachfolgenden Aufgaben, die nicht schon aus den vorausgegangenen Bestimmungen der Figuren klar sind, werden weiter unten bey den Lehrsätzen angegeben werden.

39. **Aufgabe.** Eine Senkrechte am Ende einer Linie A B aufzurichten, hier in A.

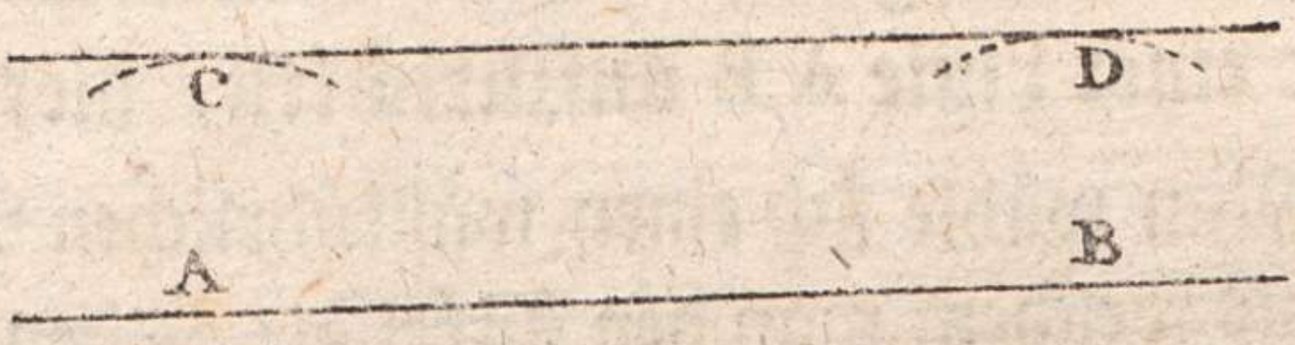
Man wähle sich einen willkührlichen Punkt C, aus welchem man den Zirkel bis an den Endpunkt A öffnet, und einen Bogen beschreibt, welcher die Linie A B in E durchschneidet. Man lege dann das Lineal an den Punkt E und C, durchschneide den Bogen bey D, und ziehe die Senkrechte D A.



40. **Aufgabe.** Eine senkrechte Linie mittelst eines rechtwinklichten Dreyeckes aufzurichten.

Man ziehe eine Wagerechte A B, lege das Lineal an selbe, und an dieses das rechtwinklichte Dreyeck; so können durch Hin- und Herschieben senkrechte Linien sehr bequem und richtig gezogen werden.

41. Anmerkung. Durch die bisherigen Aufgaben ist man in den Stand gesetzt, auf verschiedene Art rechte Winkel, und folglich auch spitzige und stumpfe aufzurichten; indem man nur die spitzigen kleiner als die rechten, und die stumpfen größer als die rechten machen darf.



42. Aufgabe. Parallellinien zu ziehen.

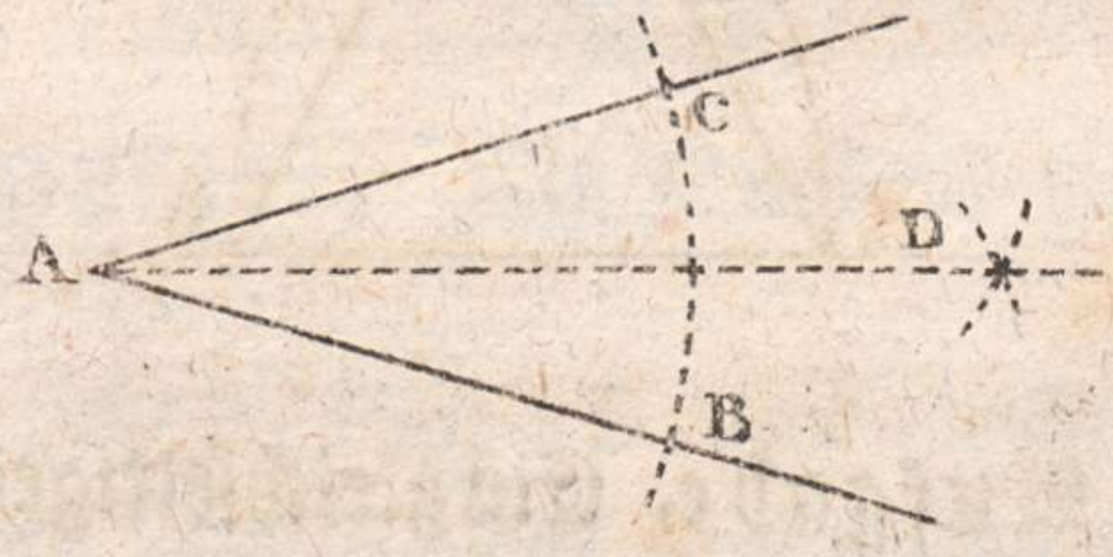
Man beschreibe auf der gegebenen Linie A B mit gleicher Zirkelöffnung ein Paar Bögen, lege das Lineal an selbe, und ziehe die Linie C D; so ist diese mit A B parallel.

43. Ist der Punkt A gegeben, durch welchen die Parallellinie gehen soll; so ziehe man A B willkührlich, setze den Zirkel in B, ziehe den Bo-

gen A C, und aus C den Bogen B D, mache mit der Oeffnung von C A aus B den Kreuzbogen bey D; so ist A D parallel mit B C.

44. Aufgabe. Eine Linie A B in gleiche und ungleiche Theile zu zertheilen; hier in 11 ½.

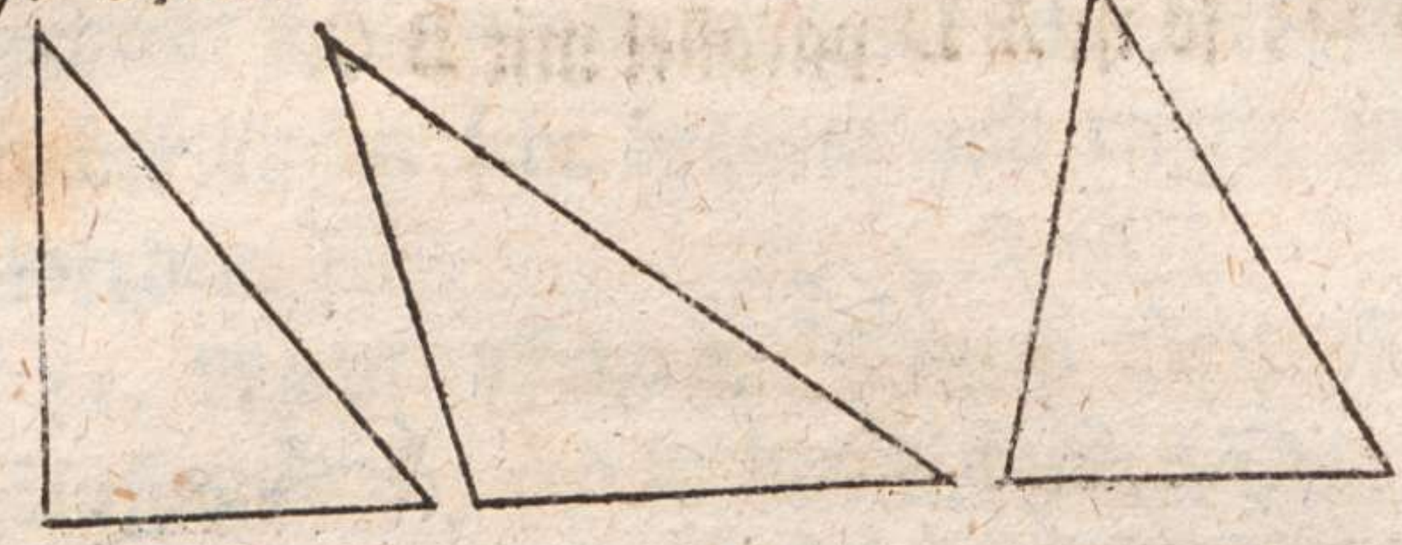
Man ziehe aus der Spitze B die Linie B C willkührlich, und schneide von B nach C die verlangte Anzahl von Theilen mit einer beliebigen Zirkelöffnung ab; ziehe aus A die Linie A C, und mache mit A C lauter Parallellen auf A B; so wird auch diese in eben so viele Theile zertheilt, als B C.



45. Aufgabe. Einen Winkel in zwey gleiche Theile zu zertheilen.

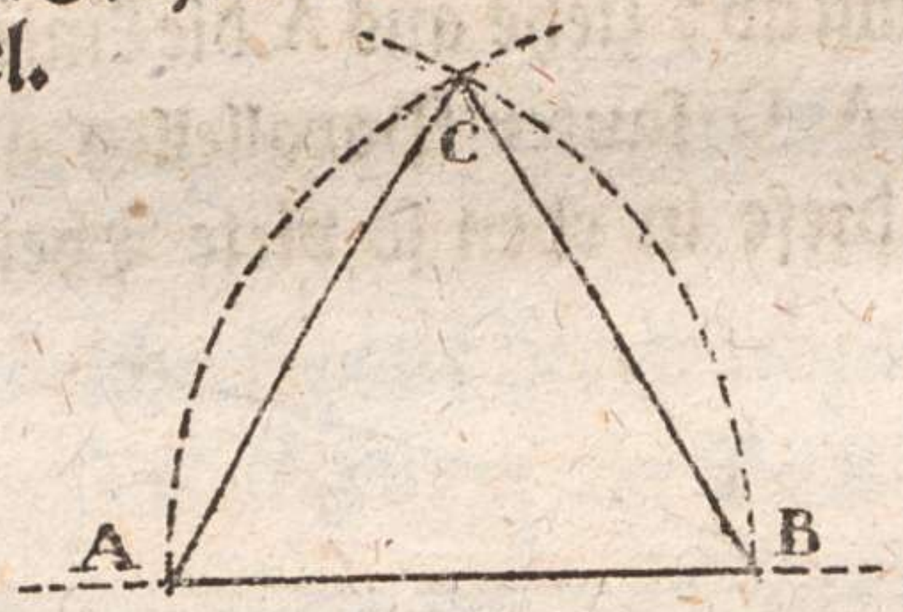
Man setze den Zirkel in A, mache die gleichen Abschnitte bey B und C, setze dann den Zirkel in B und C, und ziehe die Kreuzbögen bey D;

so theilet die Linie A D den Winkel A in zwey gleiche Theile.



46. Aufgabe. Ein rechtwinklichtes, stumpfwinklichtes, und spitzwinklichtes Dreyeck zu zeichnen.

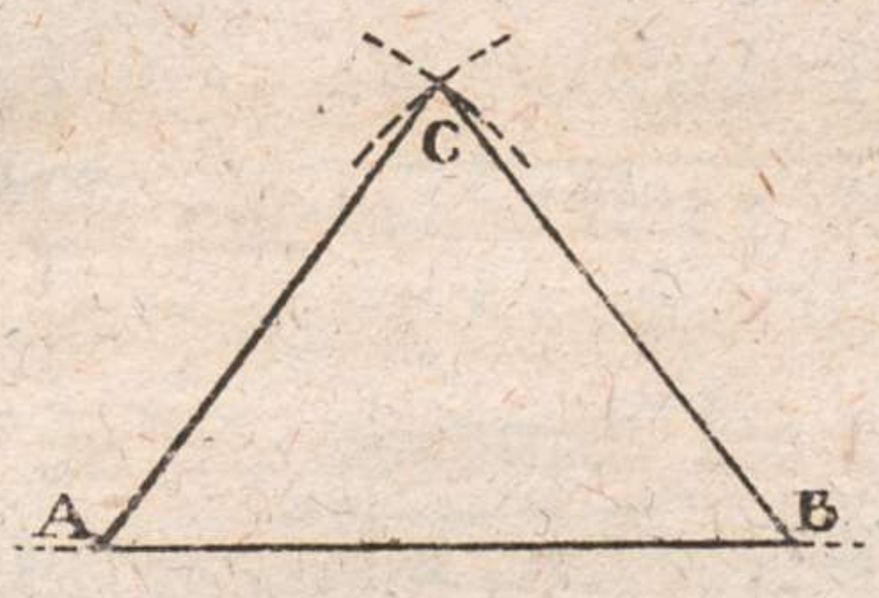
Man schließe einen rechten oder stumpfen Winkel mit einer Seite; so hat man ein recht- oder stumpfwinklichtes Dreyeck. Bey dem spitzwinklichten Dreyecke mache man aber drey spitzige Winkel.



47. Aufgabe. Ein gleichseitiges Dreyeck zu beschreiben.

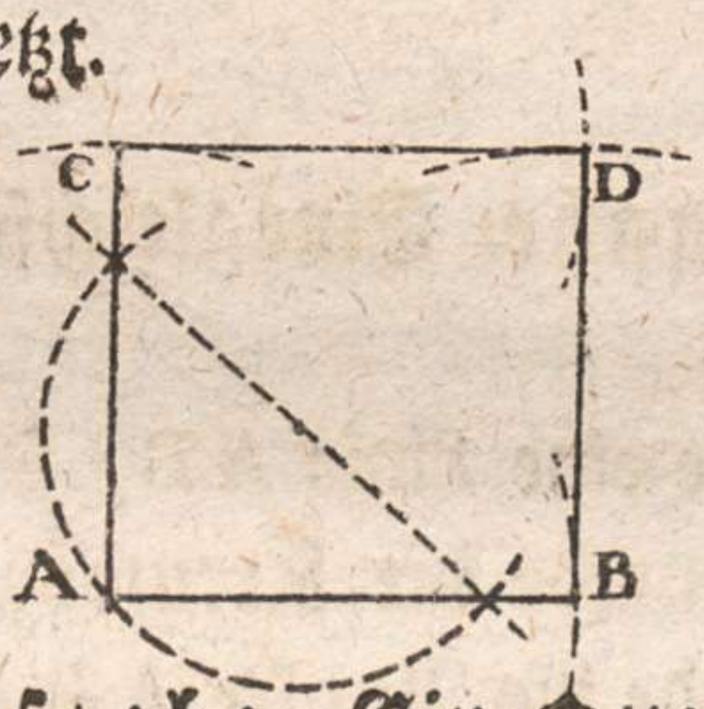
Man ziehe die Linie A B, setze den Zirkel in A, öffne ihn bis B, mache oben bey C aus A und B Kreuzbögen, und ziehe die Linie A C und B C.

48. Aufgabe. Ein gleichschenklichtes Dreyeck zu verfertigen.



Man ziehe die Linie AB, setze den Zirkel in A und B, mache die Oeffnung größer, als die Hälfte von A B, und ziehe die Kreuzbögen bey C; so werden die Schenkel A C und B C einander gleich.

49. Ungleichseitige Dreyecke werden aus drey ungleichen Seiten, wovon zwey zusammen allemahl größer, als die dritte sind, willkührlich zusammengesetzt.

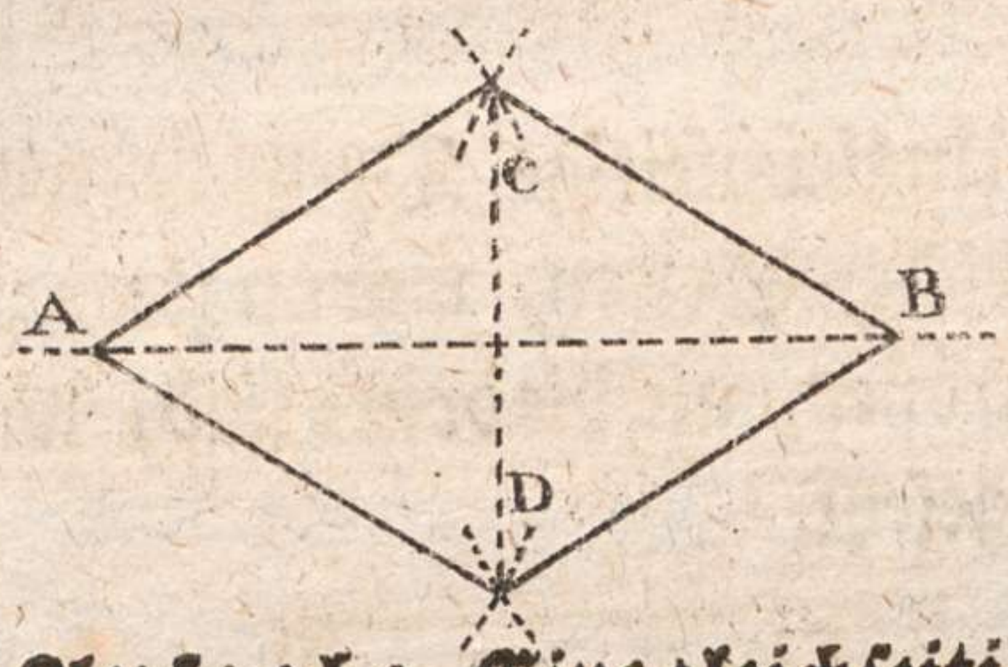


50. Aufgabe. Ein Quadrat zu zeichnen.

Man ziehe die Linie A B, und errichte bey A einen rechten Winkel, wie oben gezeigt wurde, setze den Zirkel in A, mache bey B und C mit einer willkührlichen Zirkelöffnung Durchschnitte, setze dann den Zirkel in B und C, ziehe die Kreuzbögen bey D, und verbinde sie mit geraden Linien.

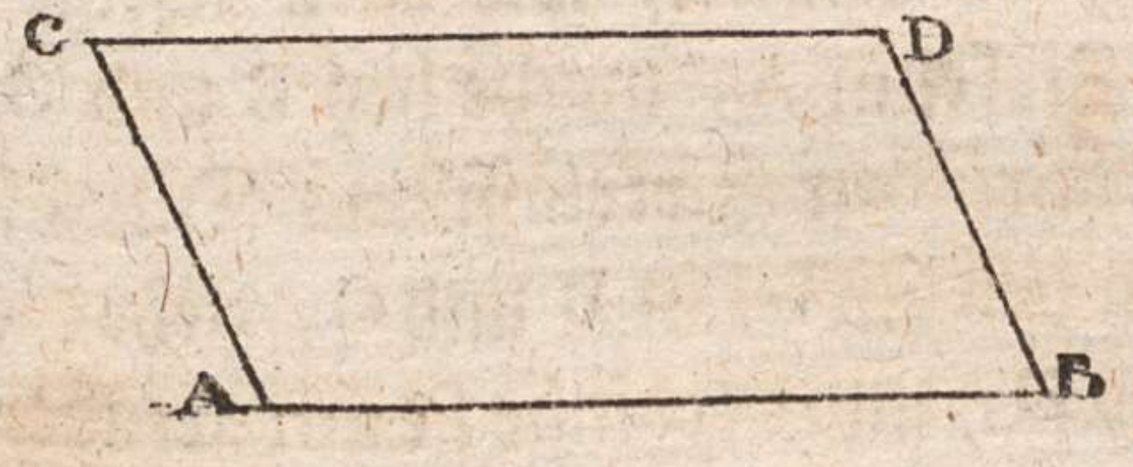
51. Aufgabe. Ein Rechteck oder längslichtes Viereck zu zeichnen.

Man errichte auf der Linie A B einen rechten Winkel, mache A C kleiner oder größer, als A B, ziehe C D parallel mit A B, und B D parallel mit A C; so ist das Viereck länglicht.



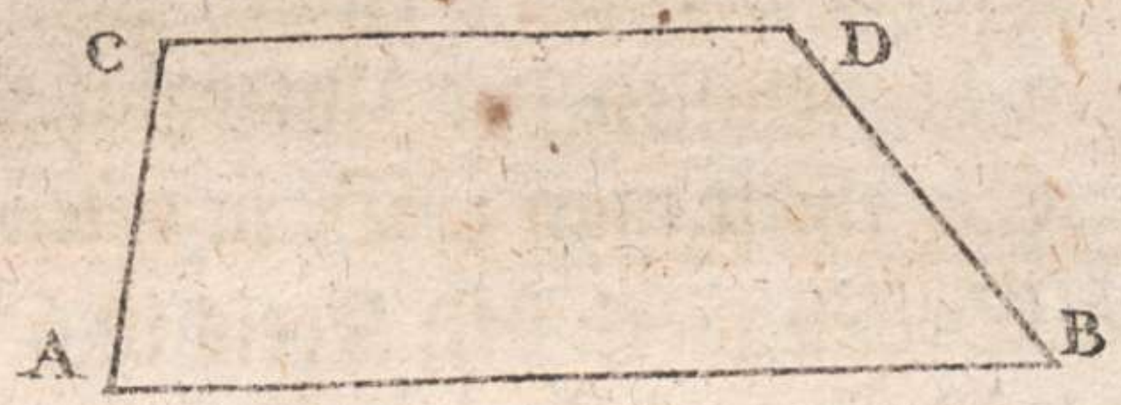
52. Aufgabe. Eine gleichseitige Raute zu verfertigen.

Man ziehe eine Linie A B, setze den Zirkel in A und B, mache die Kreuzbögen bey C und D, und verbinde die Punkte A B C D mit Linien. Damit aber kein Quadrat entstehe, muß A B größer oder kleiner, als C D seyn.



53. Aufgabe. Eine länglichte Raute zu zeichnen.

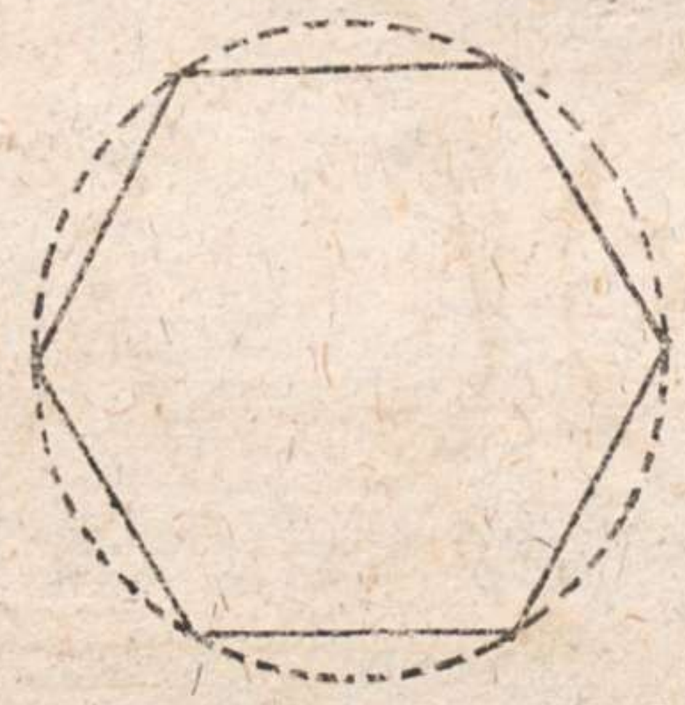
Man ziehe mit der Linie A B eine andere C D parallel, und mache eine willkührliche schiefe A C; nehme dann A B in den Zirkel, und trage sie aus C in D, wodurch die Linien B D und A C ebenfalls parallel werden, und also die länglichte Raute entsteht.



54. **Aufgabe. Ein Paralleltrapez zu zeichnen.**

Man ziehe A B mit C D parallel, und die Linien A C und B D nach ungleichen Richtungen.

Die Trapezoiden können aus vier Linien, wovon keine mit der andern parallel läuft, nach Willkühr zusammen gesetzt werden.

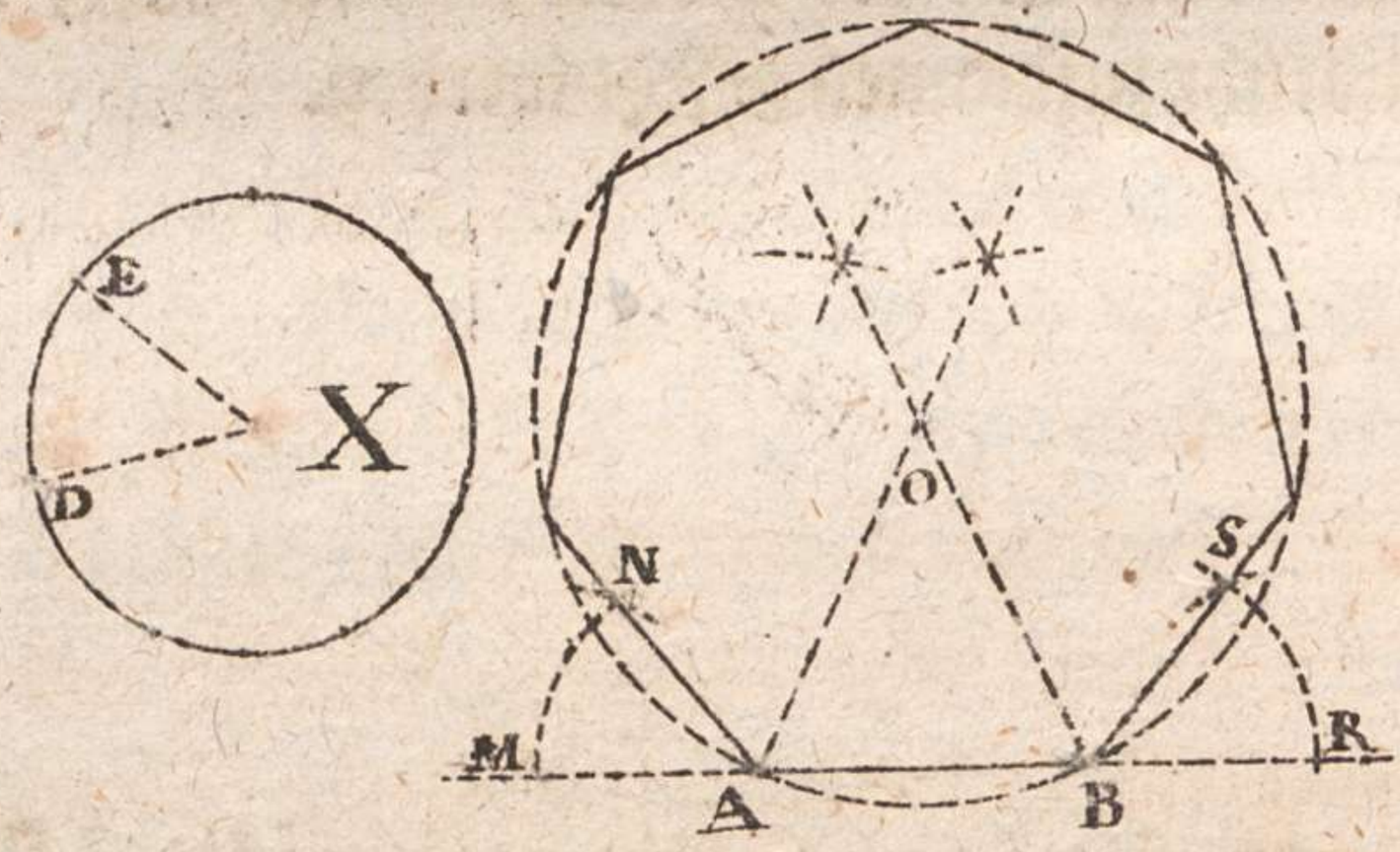


55. **Aufgabe. Ein regelmäßiges Vieleck zu verfertigen.**

Man mache einen Kreis, theile denselben in gleiche Theile, und ziehe die Theilungs-Punkte mit geraden Linien zusammen.

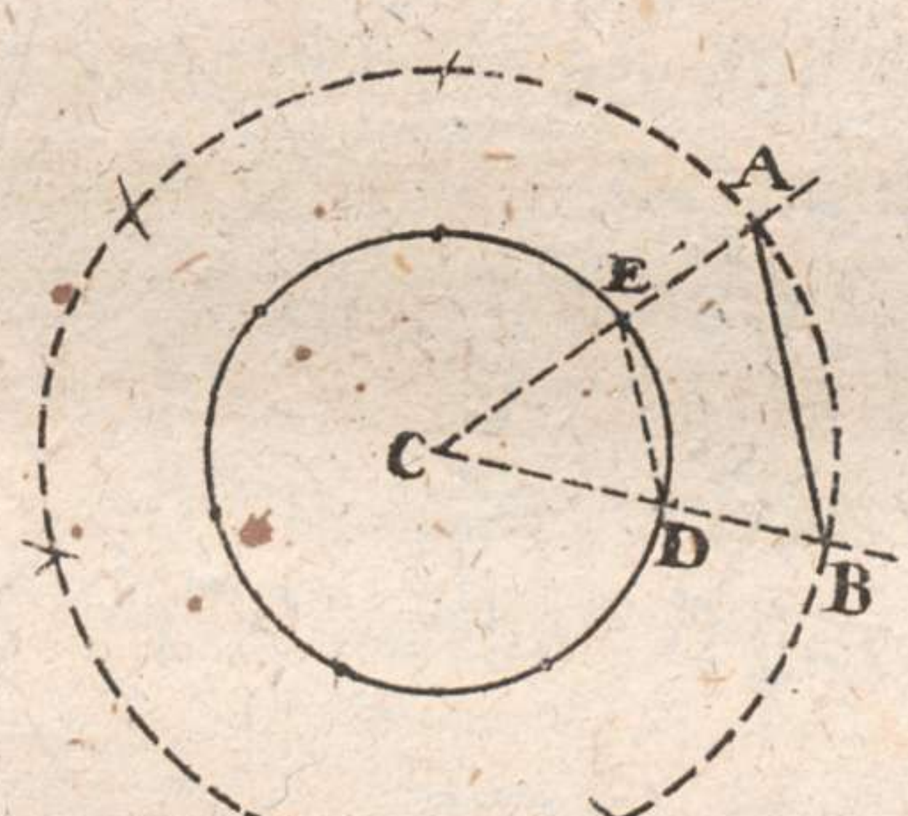
Bey dem regelmäßigen Sechsecke kann der Halbmesser als die Seite gebraucht werden; weil man diesen genau sechsmal auf der Peripherie herumtragen kann, wie wir weiter unten sehen werden.

Bey Vielecken, wo sich die Anzahl der Theile in andere größere zerfällen läßt, kann man sich am bequemsten der Unterabtheilungen bedienen. So theilt man z. B. in einem Vielecke von 24 Seiten zuerst den Kreis in 6 Theile, und halbirt jeden derselben zweymahl; so erhält man 24 gleiche Theile. Lassen sich aber die gegebenen Theile nicht in andere zerfällen, wie 7, 11 ꝛc.; so muß man schon seine Zuflucht zu den Versuchen mit dem Zirkel nehmen, welche für die gewöhnlichen Fälle hinreichend sind.



56. Aufgabe. Auf eine gegebene Linie A B ein regelmäßiges Vieleck von einer bestimmten Anzahl Seiten aufzuzeichnen; hier ein Siebeneck.

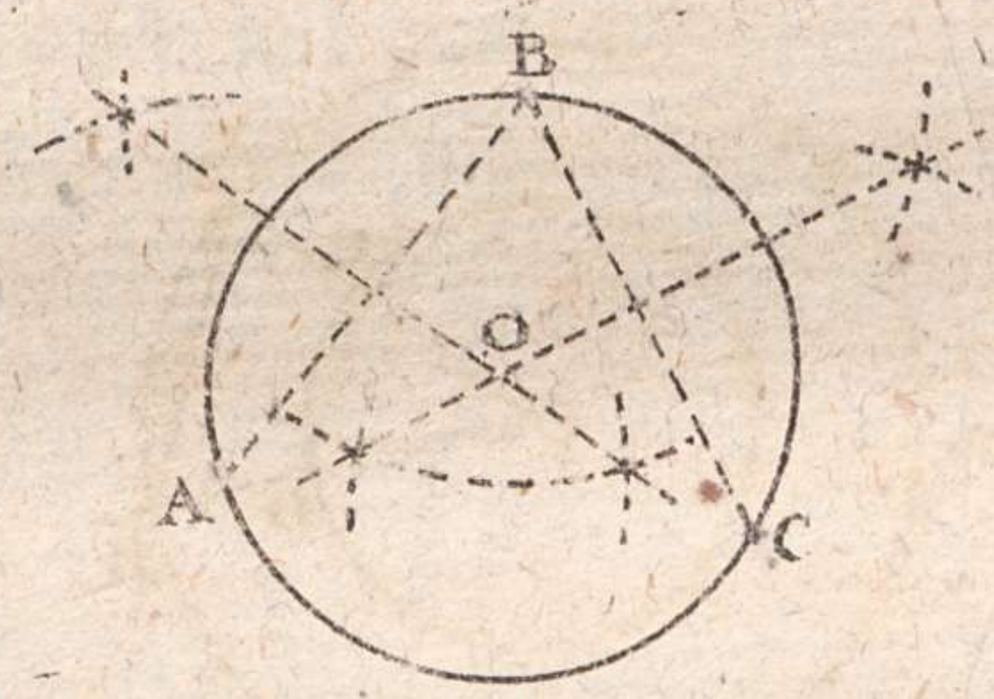
Man theile einen Kreis X. von willkührlicher Größe durch Versuche in sieben gleiche Theile; mache mit dem Halbmesser dieses Kreises aus den Punkten A und B der gegebenen Linie A B die Bögen M N und R S; nehme bey X. den Bogen D E, und trage ihn von M nach N, und von R nach S mit Durchschneidungen; so hat man die beyden Polygonwinkel bey A und B. Wird nun jeder dieser beyden Winkel in zwey gleiche Theile getheilt; so werden sich die Theilungs-Linien in O schneiden, und den Mittelpunkt eines Kreises bilden, auf welchem die Seite A B siebenmahl herumgetragen werden kann.



57. Theilt man einen willkührlichen Kreis in sieben gleiche Theile, und verlängert die Halbmesser C D und C E; so kann die gegebene Linie A B parallel mit D E hineingetragen, und mit dem Halbmesser A C ein Kreis beschrieben werden, worauf sich die Sehne A B siebenmahl herumtragen läßt.

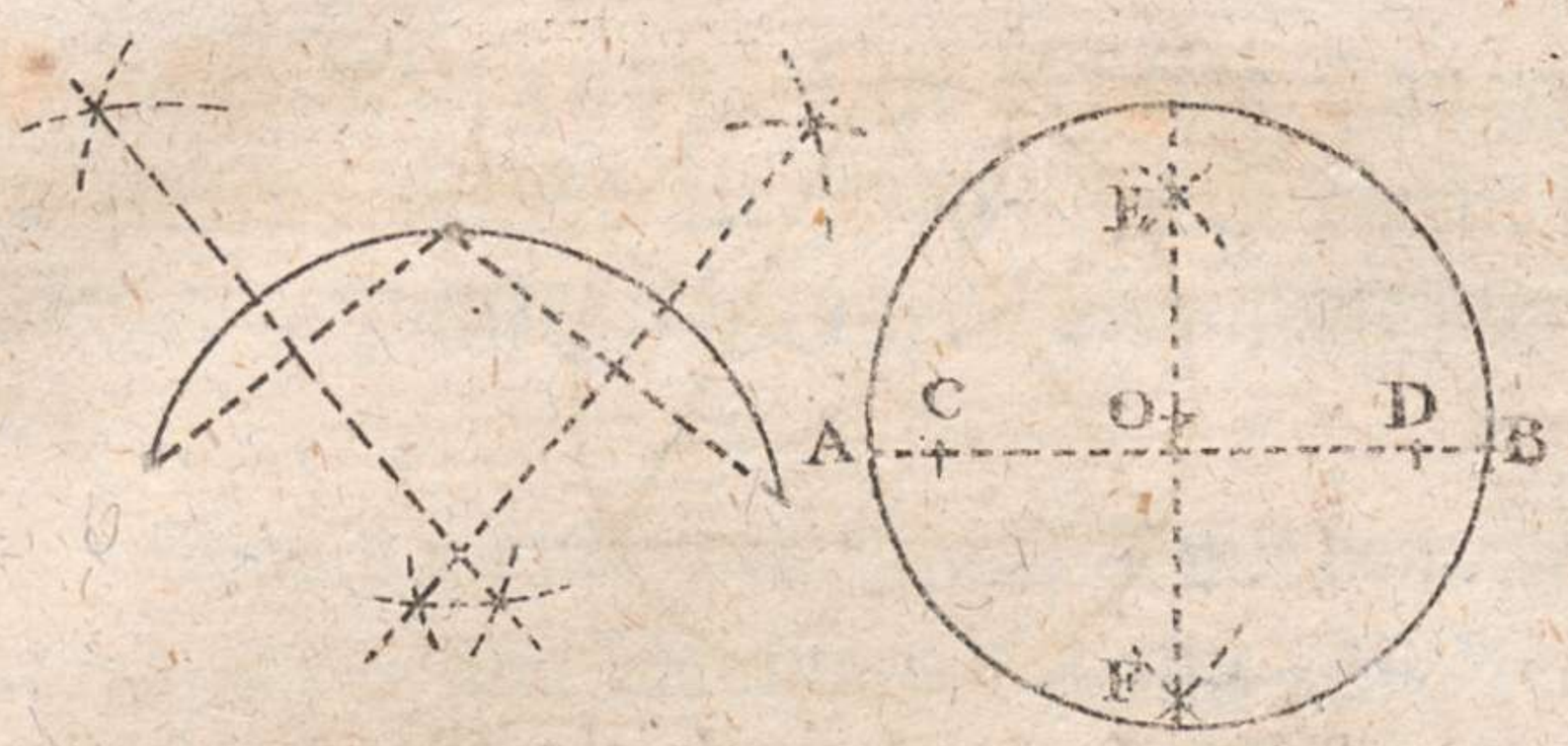
Unregelmäßige Vielecke werden aus willkührlichen Seiten und Winkeln zusammen gesetzt.

58. **Anmerkung.** Die Aufzeichnung der Flächen-Figuren nach einem bestimmten Maaße ihrer Linien und Winkel kann erst weiter unten gezeigt werden. Das Bisherige dient theils zur Uebung mit Zirkel und Lineal, theils auch zum wirklichen Gebrauche bey verschiedenen Vorfällen, wo das Maaß nach Willkühr angenommen werden kann. Hierher gehören auch noch die nachfolgenden Aufgaben, deren Gründe weiter unten vorkommen sollen.



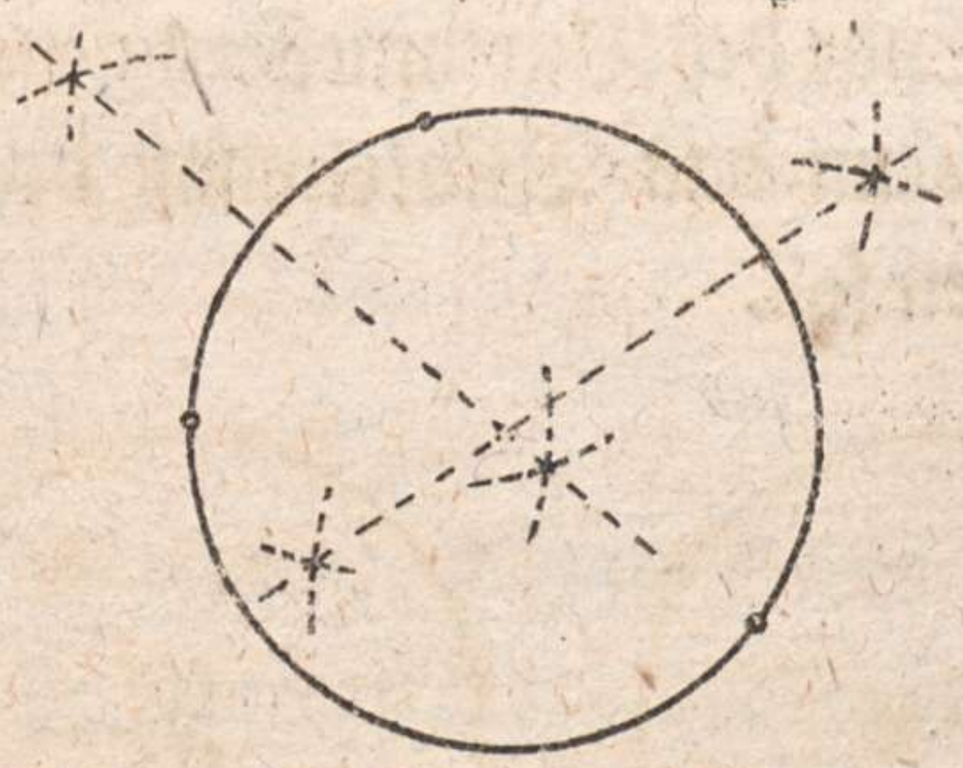
59. **Aufgabe.** Den Mittelpunkt eines Kreises zu finden.

Man bestimme drey willkührliche Punkte A B C, welche man mit Sehnen verbindet; setze auf die Mitte derselben senkrechte Linien, und verlängere sie so lange, bis sie sich in O durchschneiden; wo sich auch der Mittelpunkt des Kreises befinden wird.

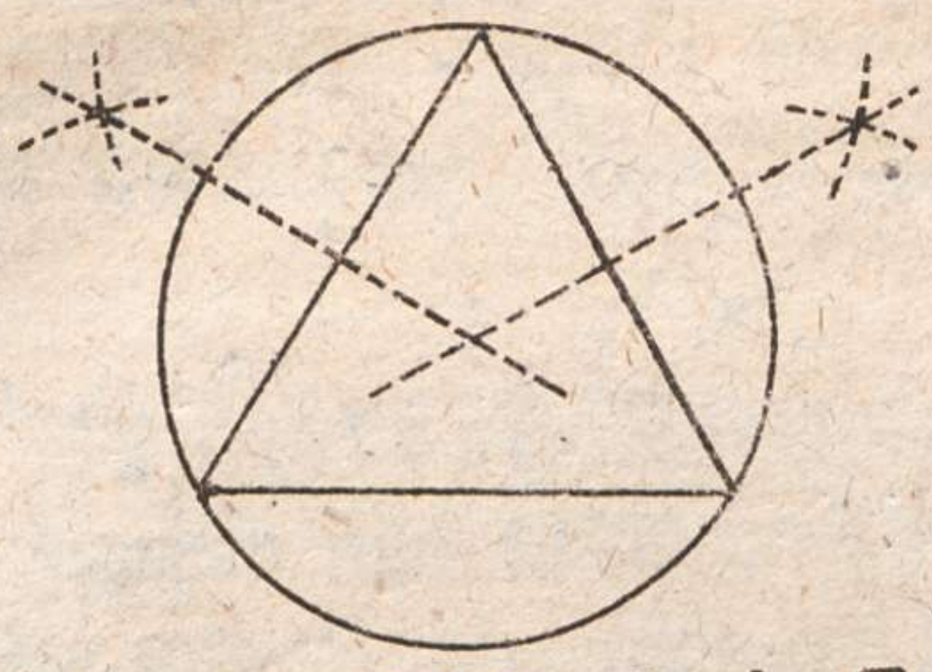


60. Auf die nähmliche Art kann auch der Mittelpunkt eines Bogens gefunden werden, wie die Figur I. zeigt.

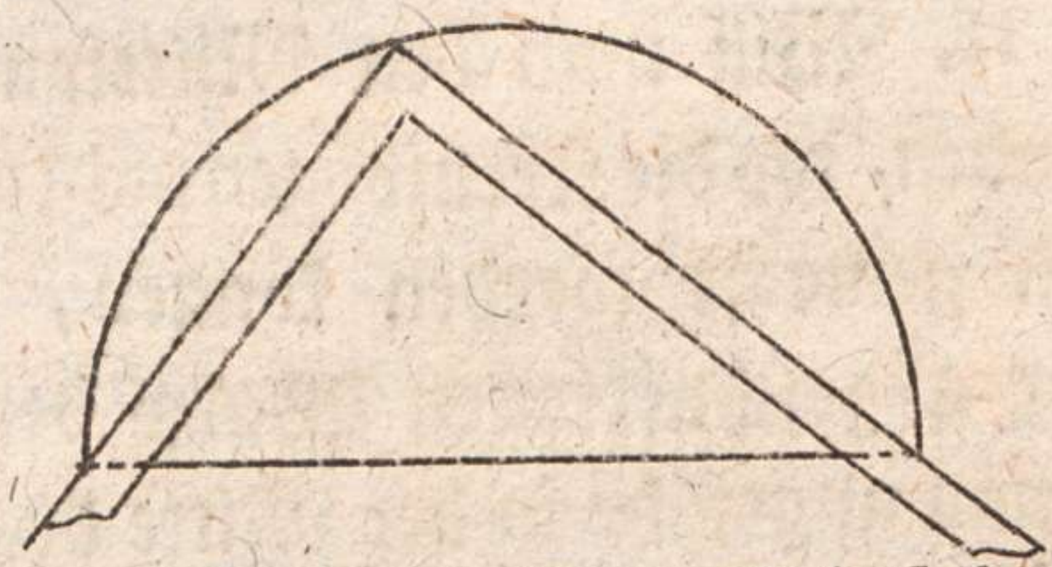
61. II. Will man den Mittelpunkt eines Kreises finden, wo die Kreuzbögen nicht außerhalb demselben gemacht werden können, wie dieß bey einer abgeschnittenen Walze der Fall ist; so ziehe man ungefähr in der Mitte desselben eine willkührliche Sehne A B, nehme von außen zwey gleichweit entfernte Punkte C und D, und mache aus diesen die Kreuzbögen bey E und F; so ist E F der Durchmesser, welcher in zwey Theile getheilt, den Mittelpunkt O gibt.



62. Sind bloß drey Punkte g'geben; so kann man auch diese in einen Kreis bringen, wenn sie nur nicht in gerader Linie stehen.

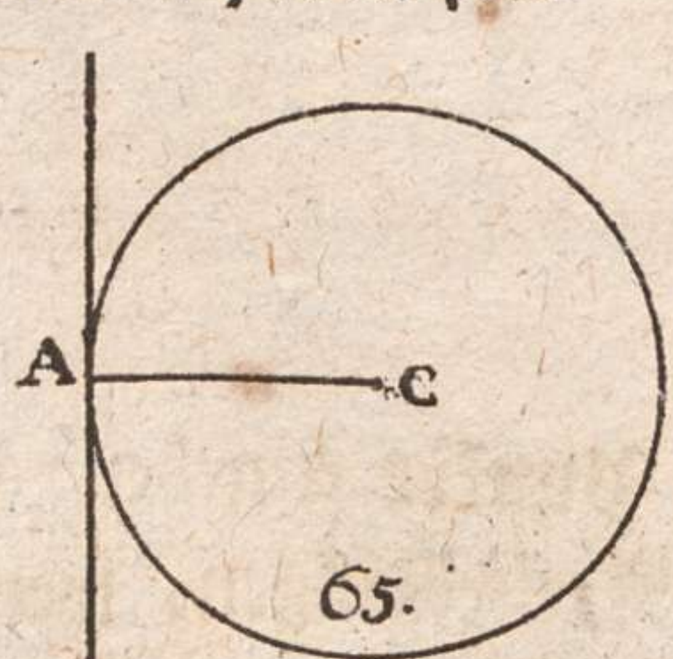


63. Eben so wird auch ein Kreis um ein Dreyeck beschrieben, wenn man zwey Seiten als Sehnen ansieht, und wie oben verfährt.

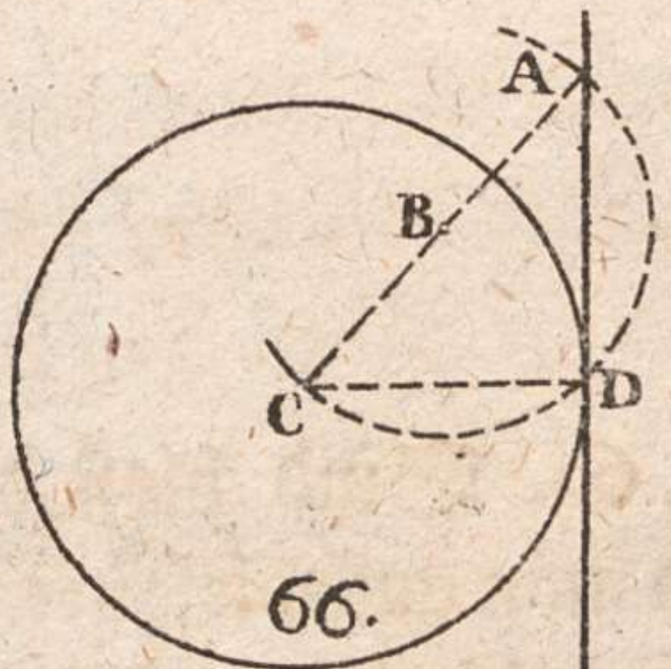


64. Aufgabe. Ein Winkelmaaß zu prüfen.

Man lege einen Schenkel an das eine Ende des Durchmessers, und die Spitze des Winkels an die Peripherie; so muß der andere Schenkel das andere Ende des Durchmessers genau durchschneiden, wenn das Winkelmaaß den rechten Winkel haben soll.



65.

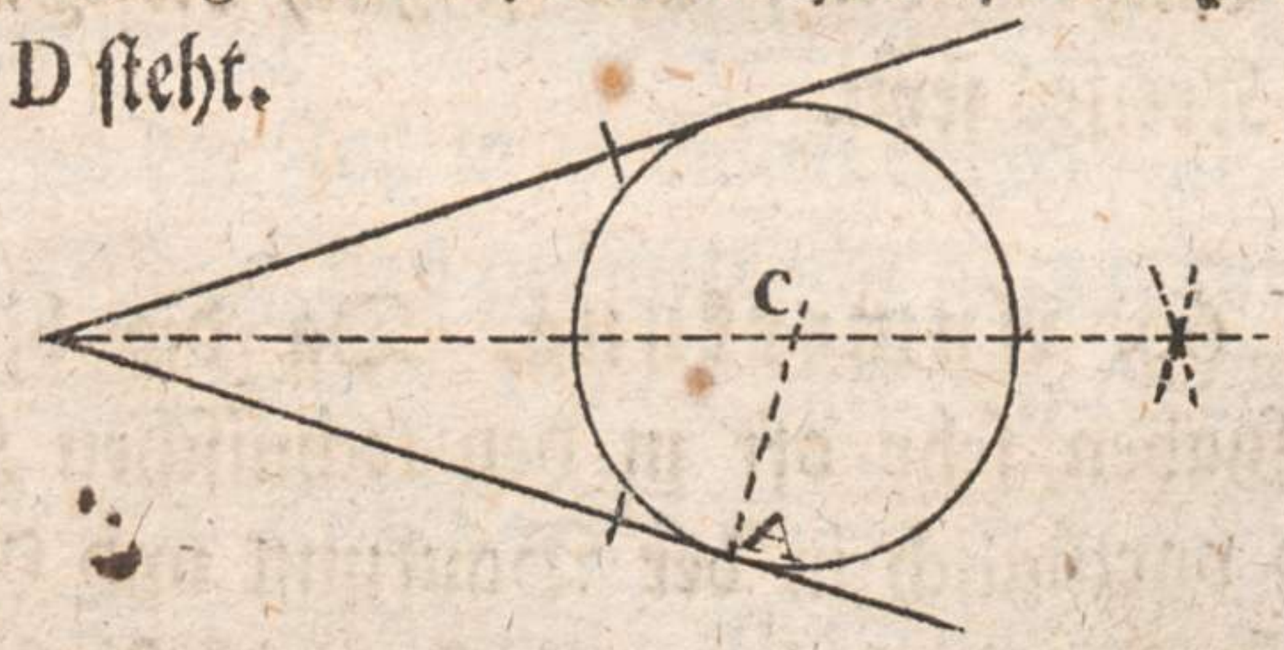


66.

65. Aufgabe. Eine richtige Tangente zu ziehen, welche die Kreislinie in einem bestimmten Punkte A berührt, aber nicht schneidet.

Man verbinde den Punkt A mit dem Mittelpunkte C, und errichte auf A eine Senkrechte; so wird diese den Kreis genau berühren, und denselben nirgends durchschneiden; denn die Tangente steht jedesmahl senkrecht auf ihrem Halbmesser, wie wir weiter unten sehen werden.

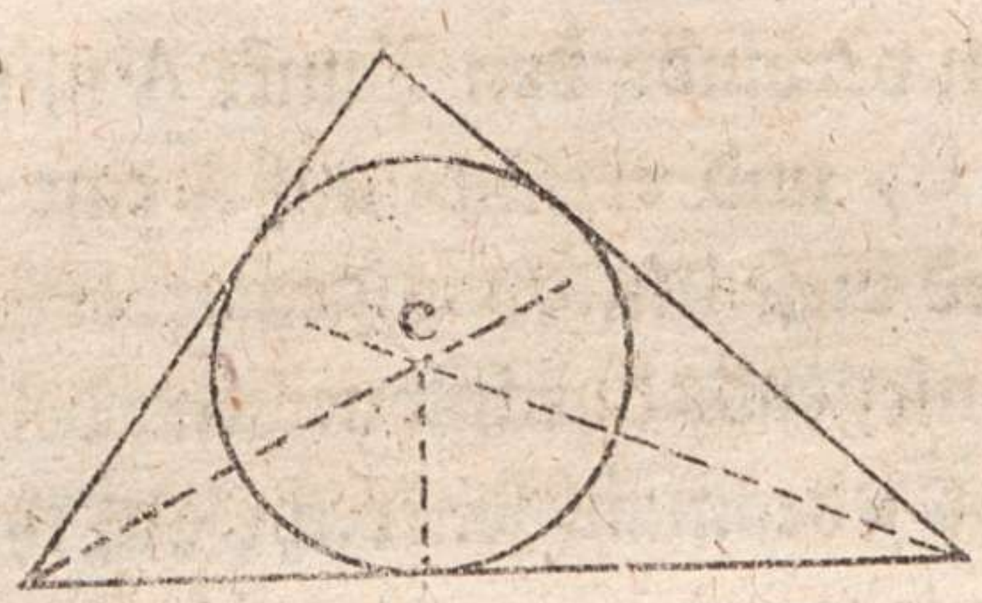
66. Eben so kann auch der Berührungs-Punkt einer Tangente gefunden werden, wenn man einen Punkt A derselben mit dem Mittelpunkte C verbindet, die ganze Linie A C in zwey gleiche Theile zertheilt, und mit der Hälfte B C einen halben Kreisbogen beschreibt, welcher den Berührungs-Punkt genau durchschneidet, weil wieder die Tangente rechtwinklicht auf dem Halbmesser C D steht.



67. Aufgabe. Einen Kreis in einen Winkel zu beschreiben, der die Schenkel desselben berühret.

Man theile den Winkel in zwey gleiche Theile, und errichte auf einem gegebenen Punkte

eines Schenkels hier in A eine senkrechte Linie; wo diese die Theilungs-Linie durchschneidet, ist der Mittelpunkt des Kreises, und A C dessen Halbmesser, auf welchem der Schenkel zur Tangente wird.



68. Aufgabe. Einen Kreis in ein Dreyeck so zu beschreiben, daß die Seiten Tangenten des Kreises machen.

Man theile zwey Winkel, jeden in zwey gleiche Theile; wo sich die Theilungs-Punkte in C durchkreuzen, fälle man Perpendikel auf die Seiten des Dreyeckes; so werden diese eine gleiche Länge haben, und folglich die Halbmesser des Kreises seyn.

69. Anmerkung. Da die bisherigen Aufgaben sehr oft in den technischen Künsten, und vorzüglich in der Baukunst und Mechanik vorkommen; so hat man sie gleich Anfangs hieher setzen wollen, damit der Wißbegierige sogleich den Nutzen der Geometrie einsehen, und dieselben nach Bedürfniß anwenden könne.

Von dem Längenmaaße.

70. Erkl. Um die Länge einer Linie auszumessen, muß wieder eine andere Linie als Grundmaaß angenommen werden. Dieses ist der in jedem Lande angenommene Schuh oder Fuß, welcher fast überall in 12 Zolle, und der Zoll in 12 Linien abgetheilt wird. Theilt man die Linie noch einmahl in 12 Theile, so erhält man Punkte, die aber nur bey den genauesten Rechnungen angewandt werden. Diese Eintheilung des Schuhmaaßes wird das zwölftheilige Maaß genannt, und weil man sich dieses Maaßes in allen bürgerlichen Künsten und Handwerken bedienet; so nennt man es auch das gemeine Werkmaaß. Außer diesen hat man noch die Klafter, welches eine Länge von 6 Schuhen ist.

71. In der Geometrie oder Feldmeßkunst wird gewöhnlich der landesübliche Schuh in 10 Zolle, und der Zoll in 10 Linien eingetheilt, daher dieses Maaß das geometrische oder zehntheilige genannt wird. Eine Länge von 10 Schuhen gibt eine Ruthe, auf welche man aber selten mehr Rücksicht nimmt; indem man die Länge einer Linie größtentheils nur in Schuhen, Zollen und Linien ausdrückt.

72. Die Zeichen, deren man sich in der Geometrie bedienet, um die Ruthen, Schuhe und Zolle auszudrücken, sind für die Ruthen ein

kleines Null, für die Schuhe ein Strich, für die Zolle zwey Striche, und für die Linien drey Striche.

4 Ruthen, 3 Schuhe, 7 Zolle, 4 Linien.
4° $3'$ $7''$ $4'''$

Diese Zeichen sind zwar die nähmlichen, wie beym den Graden, Minuten und Sekunden; allein aus den Umständen kann sehr leicht verstanden werden, welches von beyden gemeynt seye.

73. Das zehntheilige Maaß ist eigentlich wegen seiner Bequemlichkeit im Rechnen von den Geometern eingeführt worden. Denn will man im zwölftheiligen Maaße Schuhe zu Zollen machen: so muß mit 12 multiplizirt werden; beym zehntheiligen aber braucht man nur eine Nulle anzuhängen. Eben so ist es auch, wenn man Zolle zu Schuhen machen will, wo beym zwölftheiligen Maaße mit 12 dividirt, beym zehntheiligen aber nur das letzte Ziffer abgeschnitten werden darf. Z. B. Man soll $324''$ zu Schuhen machen; so hat man $32'$, $4''$. Sollen $534'''$ zu Schuhen gemacht werden; so hat man $5'$, $3''$, $4'''$. Macht man entgegen $654'$ zu Zollen; so hat man $6250''$, und zu Linien, $62500'''$.

74. Da sowohl der zwölftheilige, als der zehntheilige Schuh die nähmliche Länge enthält,

und

und diese nur in der Eintheilung der Zolle unterschieden sind; so geben 12 Zolle des zwölftheiligen Maaßes, 10 Zolle des zehntheiligen. Dadurch kann also leicht das zehntheilige in zwölftheiliges Maaß, und umgekehrt, das zwölftheilige in zehntheiliges verwandelt werden. Z. B. Wie viel zwölftheilige Zolle geben 8 zehntheilige?

Ansatz nach dem Kettensatze, oder der sogenannten reesischen Regel.

X'' zwölfth.? 8'' zehnth.
10'' zehnth. 12'' zwölfth.

Antw. $9\frac{6}{10}'' = 9'', 7\frac{1}{5}'''$. zwölfth.

Ansatz nach der Regel Detri.

Zehnth. Zwölfth. Zehnth?
10'' 12'' 8''.

Antw. $9\frac{6}{10}'' = 9'', 7\frac{1}{5}'''$ zwölfth.

Die Rechnung zeigt, daß man nur die gegebene Zahl mit 12 multipliziren, und das Produkt durch 10 dividiren darf, wodurch der Ansatz erspart wird.

Sollen z. B. 7'' zwölftheiliges Maaß in zehntheiliges verwandelt werden; so ist der Ansatz folgender:

X'' zehnth.? 7'' zwölfth.
12'' zwölfth. 10'' zehnth.

Antw. $5'', 8\frac{1}{3}'''$. zehnth.

Hieraus erhellet, daß, wenn zwölftheiliges Maaß in zehntheiliges verwandelt werden soll, man bloß zur gegebenen Zahl eine Nulle hinzuthun, und mit 12 dividiren darf, wodurch wieder der obige Ansatz erspart wird.

75. Da man sowohl in Bau- als andern Geschäften öfters wissen möchte, wie viel eine gewisse Anzahl ausländischer Schuhe nach inländischem Maaße enthalte; so hat man den Pariserfuß, weil er fast unter allen der größte ist, zum Grundmaaße angenommen, und diesen in 14400 gleiche Theile zertheilt, wovon die übrigen eine gewisse Anzahl dieser Theile erhalten.

Der baierische Fuß oder Schuh erhält von diesen Theilen 12938. Zieht man diese von den Theilen des Pariserfußes, das ist, 12938 von 14400 ab; so bleiben zum Reste noch 1462 solcher Theile übrig. Diese können durch folgende Rechnung in Zollen, Linien und Punkten gefunden werden.

X	Zoll?	1462	Th.
12938	Th.	12	Zoll.
	Antw.	$1^{''}.\ 4^{'''}.\ 3^{''''}.$	

Nach der Regel Detri: 12938 Theile geben 12 Zolle, was geben 1462 Theile?

Dadurch ist man in den Stand gesetzt, einen Maaßstab von Pariserfußen nach dem baierischen zu verfertigen, wenn man zu demselben noch 1 Zoll, 4 Linien und 3 Punkte hinzusetzt. Das Nähmliche kann bey jedem ausländischen Fußmaaße geschehen, wenn man nur weiß, wie viel Theile derselbe von dem Pariserfuße in sich enthält. Will man z. B. einen Maaßstab im Wiener = Schuhmaaße verfertigen, welcher 14011 Theile in sich enthält, so braucht man nur 12938 davon abzuziehen, und den Rest in baierischen Zollen, Linien und Punkten zu suchen; wodurch man den Wienerschuh erhält.

76 Ist anstatt dem baierischen Schuhe die Länge eines andern z. B. des Augsburger Schuhes gegeben; so kann wieder jeder andere beliebige, wovon aber die obigen Theile bekannt seyn müssen, gefunden werden. Diese Theile nach dem Pariserfuße sind in besondern Tabellen vorhanden, wovon hier einige der vorzüglichsten folgen.

Amsterdamer	12570	Danziger	12751
Anspacher	13200	Dreßdner	12550
Augsburger	13129	Florentiner Brac-	
Baierischer	12938	cio	25800
Berliner	13730	Frankfurter	12700
Braunschweiger	12650	Französische neue Metre,	
Breslauer	12600	(lies Met'r)	44329
Dänischer	14034	Königsberger	13640

Leipziger	12520	Rheinländischer	13913
Londner	13511	Römischer Palmo	9903
Mayländer Bracio	27600	Rußischer	23860
Mannheimer	12865	Salzburger	13150
Nürnberger	13470	Schwedischer	13160
Pariser	14400	Tyroler	14811
		Wiener	14011

77. Da der Pariserfuß 14400, und der baierische 12938 Theile in sich enthält; so geben 12938 Pariserfuß 14400 baierische. Eben so geben auch 12938 rheinische Schuhe 13913 baierische. Hat man also eine gewisse Anzahl Schuhe im rheinischen oder andern Maaße; so können diese leicht in baierische verwandelt werden. Z. B. Wie viel geben 466 Pariserfuß im baierischen Maaße?

X′ Baier.?	466′ Paris.
12938 P.	14400′ B.

Antw. $518\frac{4358}{6469}$.

Eben so kann man auch die Längenmaaße von andern zwey Orten miteinander vergleichen. Z. B. Wie viel machen 220 Wienerschuhe im Augsburger-Schuhmaaße aus?

Da der Wienerschuh 14011, der Augsburger aber 13129 Theile enthält; so geben 13128 Wienerschuh 14011 Ausburger. Der Ansatz ist folgender:

X′ Augsb.? 220 Wien.
13129 W. 14011 A.

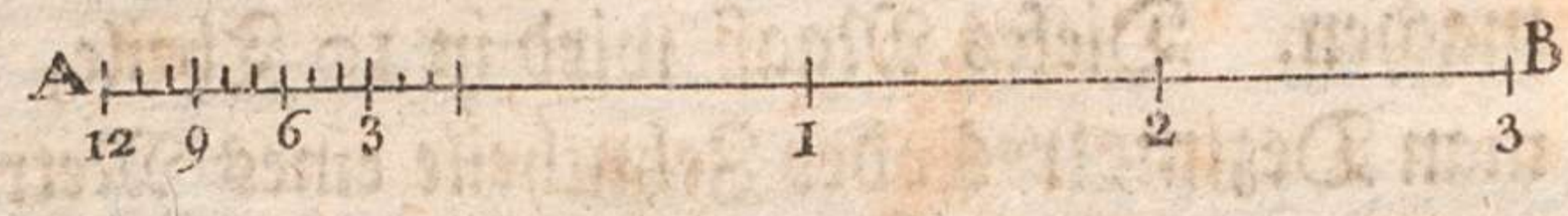
Antw. 234′, 9″.

Nach der Regel Detri wird dieses eben so leicht zu berechnen seyn.

78. Wir haben oben gesehen, daß das neue französische Maaß, Metre genannt; 44329 Theile eines Pariserfußes in sich enthält, welche nach baierischem Maaße 3′, 5″, 1‴, 4⁗ ausmachen. Dieses Maaß wird in 10 Theile, die man Dezimetres oder Zehntheile eines Metres; diese in 10 andere, die Zentimetres oder Hundertttheile, und diese wieder in 10 andere, die man Millimetres oder Tausendtheile eines Metres nennt, eingetheilt. Trägt man die obigen 3′, 5″, 1‴, 4⁗ von dem baierischen Werkschuhe auf einen Stab, und theilt diesen in 10 Theile, und jeden wieder in 10 andere; so hat man den neuen französischen Maaßstab, Metre. Eine Länge von 10 Metern heißt ein Dekametre, 100 Metres werden ein Hektometre, 1000 Metres, ein Kilometre, und 10000 Metres ein Myriametre genannt, welches Letztere die Länge einer neuen französischen Meile ist. Man sieht hieraus, daß dieses neue Maaß durchaus in Decimalen abgetheilt, und daher für die Berechnungen sehr bequem eingerichtet ist.

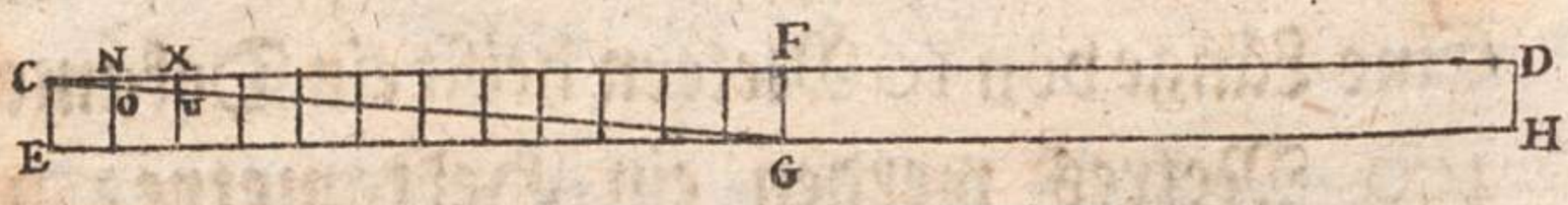
Von den verjüngten Maaßstäben.

79. **Erklärung.** Will man eine gemessene Linie nach der Anzahl ihrer Schuhe und Zolle zu Papier bringen; so kann dieses natürlich nicht in der nähmlichen Größe, wie sie der gemeine Werkschuh gibt, sondern durch ein kleineres oder **verjüngtes** Maaß geschehen.



80. **Aufgabe.** Einen verjüngten Maaßstab für das zwölftheilige Maaß aufzuzeichnen.

Man ziehe eine Linie A B, theile sie in mehrere gleiche Theile, die man Schuhe gelten läßt, und einen dieser Theile wieder in 12 andere, welche die Zolle bedeuten.



81. **Aufgabe.** Einen verjüngten Maaßstab zu zeichnen, wo der Schuh kleiner angenommen wird.

Man ziehe die Linie C D, theile von C bis F zwölf gleiche Theile, ziehe die Senkrechte C E eben so hoch als C N, dann die Parallellinie E H, und die Diagonallinie G C, so wird diese

die zwölf Theile so schneiden, daß jeder um einen gleichen Theil größer wird, als der andere. Es kann also C N einen Schuh, und N O einen Zoll, X U zwey Zolle u. s. w. bedeuten. Läßt man C F einen Schuh gelten, so gibt C N einen Zoll, und N O eine Linie.

Ist eine gemessene Linie nach der Anzahl ihrer Schuhe und Zolle gegeben, und man soll dieselbe nach einem der obigen verjüngten Maaßstäbe zu Papier bringen, so macht man zuvor eine willkührlich lange Linie, nimmt die gegebene Anzahl von Schuhen und Zollen auf dem verjüngten Maaßstabe, trägt sie auf die gezeichnete Linie, und bemerkt ihre Länge durch einen Punkt oder eine kleine Bogenlinie.

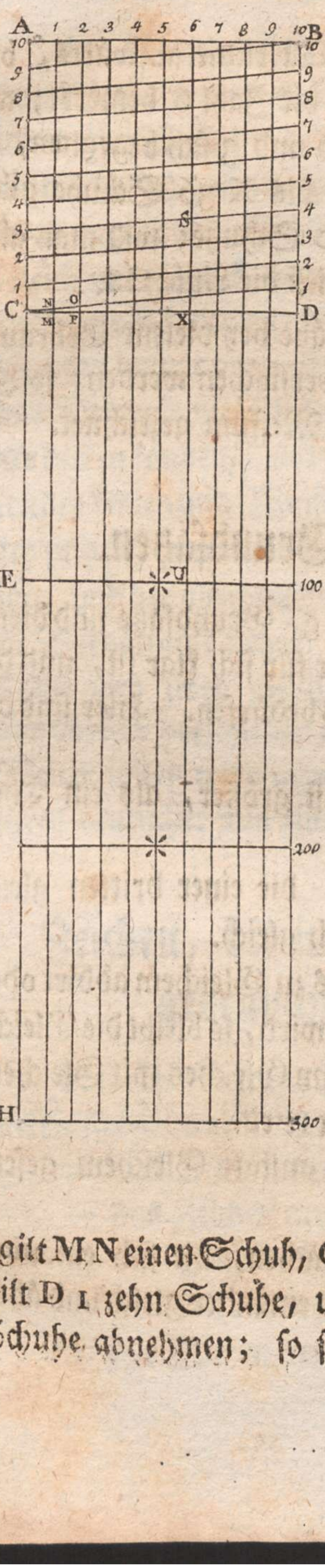
82. Will man eine auf das Papier gezeichnete Linie nach diesen Maaßstäben messen; so braucht man sie nur in den Zirkel zu fassen, und die Oeffnung auf den Maaßstab zu setzen: so wird sich die Länge derselben in Schuhen und Zollen zeigen.

In den Bauplänen und andern Zeichnungen für technische Künste ist alle Mahl der verjüngte Maaßstab beygesetzt, wodurch man im Stande ist, die wirkliche Länge der Linien zu erfahren, und das Werk im Großen auszuarbeiten.

Man hat viele vortreffliche Werke ausländischer Meister, wo die verjüngten Maaßstäbe

nach dem gewöhnlichen Maaße ihres Wohnorts beygesetzt sind. Um also die wahre Länge der Linien nach dem landesüblichen Werkschuhe zu finden, muß man zuvor die oben angezeigten Verhältnisse wissen. Wir haben gesehen, daß der baierische Werkschuh um 1″, 4‴, 3⁗ kürzer ist, als der Pariserfuß; will man also in einem Bauplane eines französischen Meisters, wo der Pariserfuß als Grundmaaß angenommen ist, die Länge der Linien nach baierischem Maaße wissen, so muß bey jedem Schuhe 1″, 4‴, 3⁗ zugegeben werden. Da aber dieses ein beständiges Rechnen verursachen, und die Arbeit verzögern würde; so ist es am bequemsten, wenn man 9 französische Schuhe in 10 Theile zertheilt, wovon jeder hinlänglich genau einen baierischen Schuh ausmachen wird. Auf diesem Maaßstabe können nun alle Linien abgenommen, und ihre Länge nach baierischem Maaße auf der Stelle gefunden werden. Eine Pforte eines öffentlichen Gebäudes, welche im französischen Maaße 9′ Breite, und 18′ Höhe hält, hat nach baierischem 10′ Breite, und 20′ Höhe, welches schon einen beträchtlichen Unterschied verursacht. Bey Werken anderer ausländischer Meister kann man auf eine ähnliche Weise verfahren.

83. Aufgabe. Den gewöhnlichen verjüngten Maaßstab für das zehntheilige Maaß aufzuzeichnen.



Man theilt eine Linie A H von A bis C in 10 gleiche Theile, zieht A B senkrecht auf A H, theilet A B ebenfalls in 10 Theile nach beliebiger Größe, und macht die Theile von B D gleich denen von A C; zieht dann die Quer- oder Transversallinien C 1, 1 2, 2 3 ꝛc. Die Länge A C trage man abwärts ungefähr 5 Mahl, und setze die Zahlen, wie die Figur zeigt.

Läßt man nun die Weite D 1 einen Schuh gelten; so gibt D B 10 Schuhe, und M N einen Zoll. Läßt man D 1 zehn Schuhe gelten, so gilt M N einen Schuh, O P zwey Schuhe u. s. w. Gilt D 1 zehn Schuhe, und man will z. B. 36 Schuhe abnehmen; so suche man auf A C die

Zahl 3, fahre auf der Querlinie aufwärts, bis man auf der Linie A B die Zahl 6 bemerkt; wo die geraden Linien von 6 und 3 sich begegnen, ist der Punkt S, welcher bis X 36 Schuhe gibt. Die Linie C E hält 100 Schuhe; will man also 136 Schuhe, so gibt dieß die Linie U S.

Da diese Maaßstäbe bey vielem Gebrauch auf dem Papiere sehr verstochen werden; so hat man sie gewöhnlich auf Messing gezeichnet.

Von den Grundsätzen.

84. Erklärung. Grundsätze sind diejenigen, deren Wahrheit für sich klar ist, und die folglich keines Beweises bedürfen. Hier sind die gewöhnlichsten.

1. Das Ganze ist größer, als ein Theil desselben.

2. Zwey Größen, die einer dritten gleich sind, sind auch unter sich gleich.

3. Wenn Gleiches zu Gleichem addirt oder von Gleichem subtrahirt wird, so bleibt die Gleichheit; eben so auch, wenn Gleiches mit Gleichem multiplizirt oder dividirt wird.

4. Gleiches kann anstatt Gleichem gesetzt werden.

5. Winkel und Flächen, die sich einander vollkommen decken, sind einander gleich und ähnlich (kongruent).

85. **Anmerkung.** Zwey Flächen können ihrem Inhalte nach gleich seyn, ohne daß sie einander ähnlich sind; denn ein Quadrat kann die nähmliche Flächen-Größe in sich enthalten, als ein länglichtes Viereck, oder auch als ein Dreyeck. Gleich und ähnlich sind sie nur dann, wenn sie einander vollkommen decken. Daher kongruente Figuren immer von einerley Gattung seyn müssen; weil Dreyecke nie Vierecke, und diese nie Vielecke decken können, wozu eine vollkommene Gleichheit der Linien und Winkel erfordert wird. Aehnlich sind sie, wenn nur die Winkel einander gleich sind, und die gleichnahmigen Linien miteinander im Verhältnisse stehen. Zwey Quadrate, zwey Kreise und zwey gleichseitige Dreyecke, wenn ihre Größe verschieden ist, sind einander ähnlich. Weiter unten wird man die Aehnlichkeit der Figuren deutlicher aus einander setzen.

Zeichen, die in der Geometrie gebraucht werden.

86. Verschiedene Dinge werden in der Geometrie größtentheils nur mit Zeichen angesetzt.

= das Zeichen der Gleichheit.

∽ das Zeichen der Aehnlichkeit.

≌ das Zeichen der Gleichheit und Aehnlichkeit (Kongruenz).

+ das Zeichen der Addition.

— das Zeichen der Subtraktion.

× oder ein Punkt (.) das Zeichen der Multiplikation.

: oder ein Strich zwischen zwey Zahlen $\frac{2}{3}$ das Zeichen der Division.

$A B^2$ bedeutet das Quadrat A B.

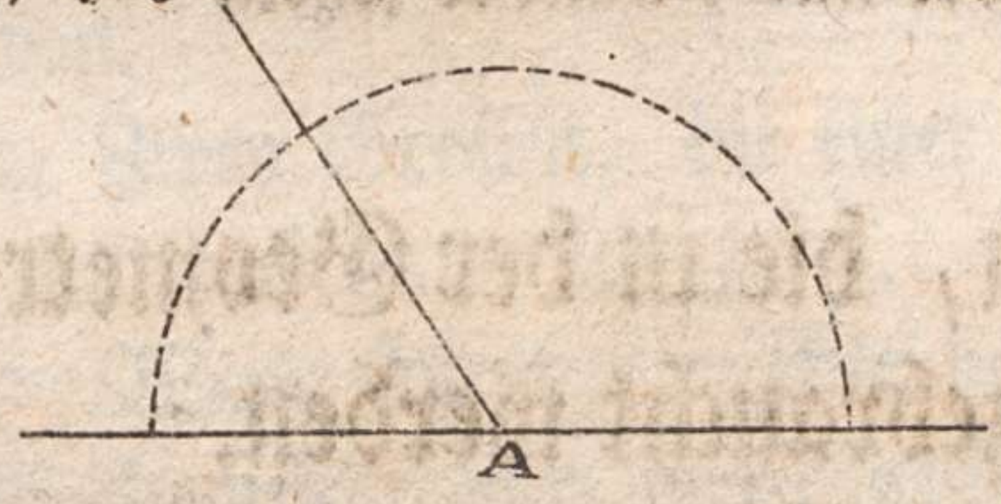
$A B^3$ bedeutet den Kubus oder Würfel von A B.

$\sqrt[2]{}$ oder schlechtweg $\surd$ zeigt die Quadratwurzel an.

$\sqrt[3]{}$ zeigt die Kubikwurzel an.

Die nöthigsten Lehrsätze.

87. **Erklärung.** Ein Lehrsatz ist derjenige, dessen Wahrheit erst durch Schlüsse dargethan werden muß. Sätze, welche aus den Grund- und Lehrsätzen folgen, nennt man **Zusätze.**



88. **Lehrsatz. Die Nebenwinkel halten zusammen 180°, und sind gleich zwey Rechten.**

Beweis. Setzt man den Zirkel in den gemeinschaftlichen Scheitelpunkt A; so kann ein halber Kreisbogen um selbe gezogen werden, welcher 180° hält.

89. Zusatz. Wenn also von den beyden Nebenwinkeln einer bekannt ist; so ist es auch der andere; denn er ist der Rest von 180°. Ist Einer aufgezeichnet, so bleibt der andere von sich selbst übrig.

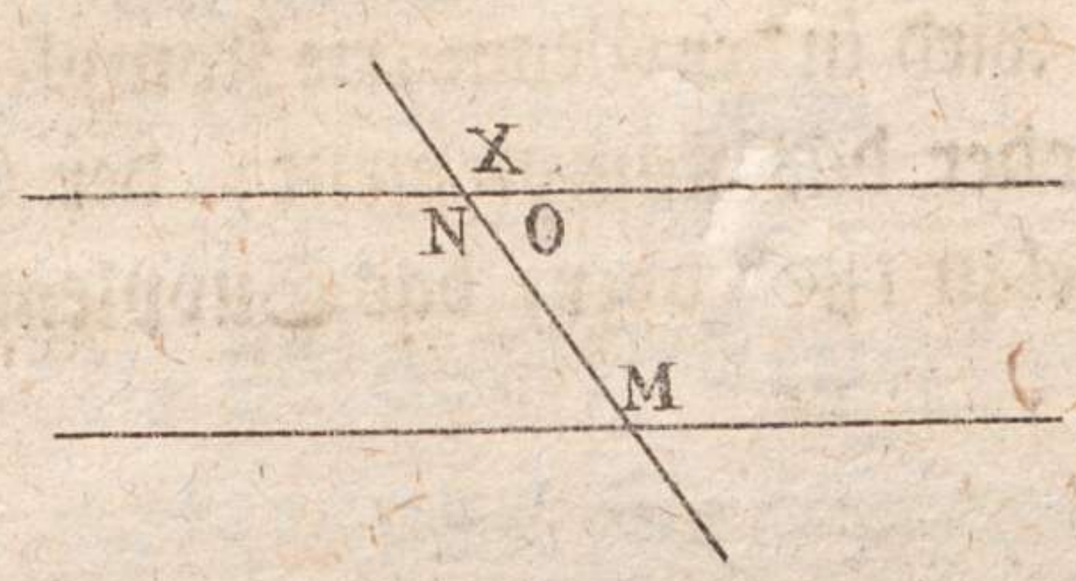
90. Zusatz. Ist Ein Nebenwinkel ein rechter, so ist es auch der andere, weil der Rest 90° gibt.

91. Anmerkung. Der Ergänzungswinkel zu 90° wird in der Geometrie Komplementswinkel, oder das Komplement; der Ergänzungswinkel zu 180° aber, das Supplement genannt.

92. Lehrsatz. Die Scheitelwinkel sind einander gleich.

Beweis. Der Winkel M hat mit N den halben Kreisbogen zum Maaße, und O mit N ebenfalls. Nimmt man also von beyden Gleiches, nähmlich N, hinweg, welches nach dem dritten Grundsatze ohne Schaden der Gleichheit geschehen kann; so bleibt der Winkel M gleich dem Winkel O.

93. Zusatz. Ist von den vier Vertikalwinkeln nur Einer gegeben; so sind auch alle übrigen schon bekannt. Denn gibt man z. B. den Winkel A; so ist B als sein Nebenwinkel, und C und D als ihre beyden Vertikalwinkel bekannt.



94. Lehrsatz. Wenn zwey Parallellinien von einer dritten geraden Linie durchschnitten werden, so sind:

1. die Wechselwinkel M und N einander gleich;

2. der äußere Winkel X ist dem innern M gleich;

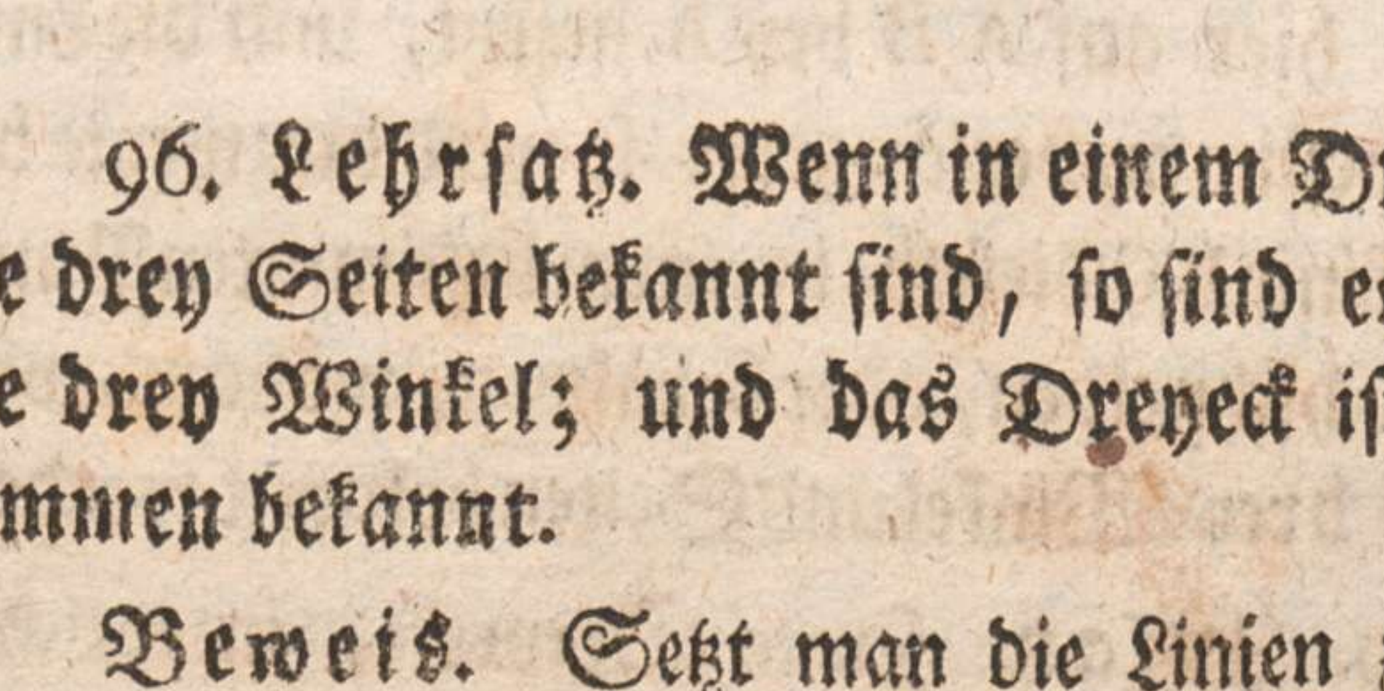
3. die beyden innern Winkel O und M halten zusammen 180°.

Beweis. Die Parallellinien behalten mit der durchschneidenden Linie die nähmliche Lage bey, sie mögen weit oder nahe beysammen stehen. Rückt man sie nun immer näher gegen einander; so werden sich endlich sowohl die Linien, als Win-

kel decken. Es ist also 1. M = N, weil sie beym Aufeinanderlegen Vertikalwinkel bilden. 2. Setzt man anstatt N das gleiche M, so ist auch X = M. 3. Da X und O als Nebenwinkel 180° halten, und man wegen Gleichheit anstatt dem Winkel X den Winkel M setzen kann; so halten auch M und O zusammen 180°.

95. **Zusatz.** Linien, von welchen die obigen drey Fälle erwiesen werden können, sind also auch **parallel.**

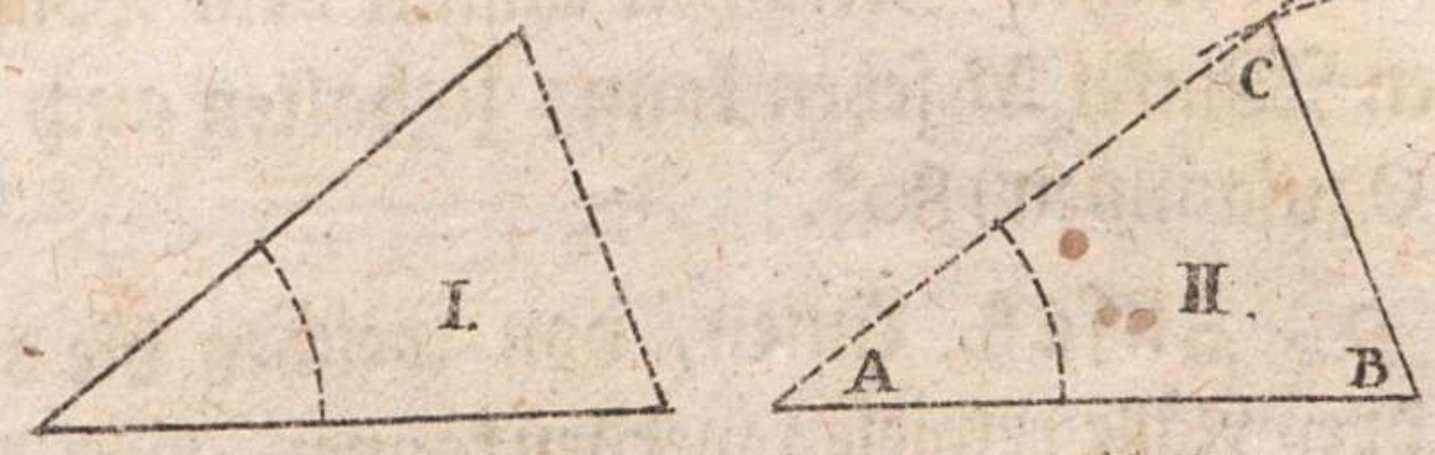
Hierin liegt die Ursache von der oben, Seite 18, Nro. 43 angeführten Auflösung der Aufgabe, **Parallellinien zu ziehen,** wo bey A und B Wechselwinkel vorkommen.



96. **Lehrsatz.** Wenn in einem Dreyecke die drey Seiten bekannt sind, so sind es auch die drey Winkel; und das Dreyeck ist vollkommen bekannt.

Beweis. Setzt man die Linien zusammen; so bestimmen sich die Winkel von sich selbst, und das Dreyeck bleibt immer das nähmliche, man mag den Linien eine Lage geben, welche man will.

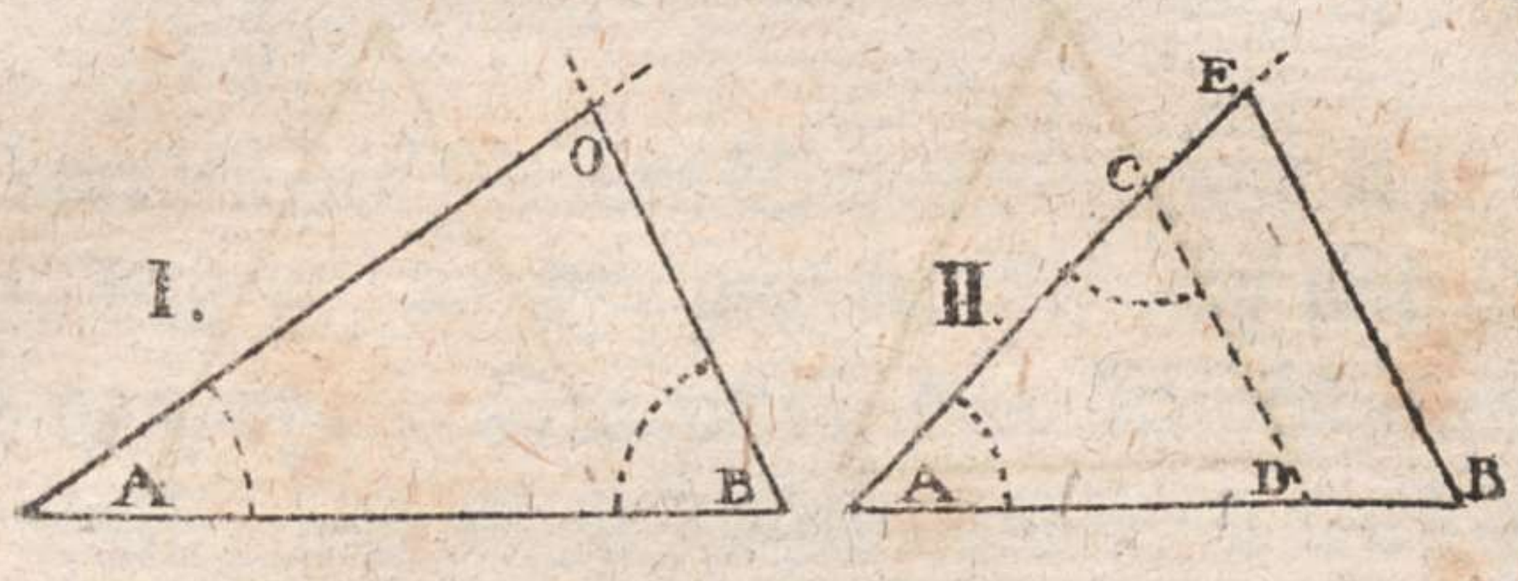
97. Zusatz. Zwey Dreyecke, welche durchaus gleiche Seiten haben, sind also auch einander gleich und ähnlich (kongruent).



98. Lehrsatz. Wenn zwey Seiten, und ein Winkel bekannt sind; so ist ebenfalls das ganze Dreyeck bestimmt.

Beweis. Sind die zwey Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel bekannt, und man verbindet die Endespunkte der gegebenen Linien; so bestimmen sich die zwey Winkel, und die dritte Seite von sich selbst, wie bey Fig. I. Ist ein anderer, als der eingeschlossene Winkel, wie bey Fig. II. gegeben, und wird dieser auf eine der bekannten Linien, hier auf A B bey A gesetzt, und die Linie A C unbestimmt verlängert: so wird die zweyte bekannte Linie B C dieselbe in einem bestimmten Punkte C durchschneiden, oder berühren, wodurch wieder die drey Winkel und Seiten bekannt werden.

99. Zusatz. Zwey Dreyecke, in welchen zwey Seiten und ein Winkel in Einem, gleich sind zweyen Seiten und einem Winkel im andern Dreyecke, sind vollkommen einander gleich und ähnlich (kongruent).



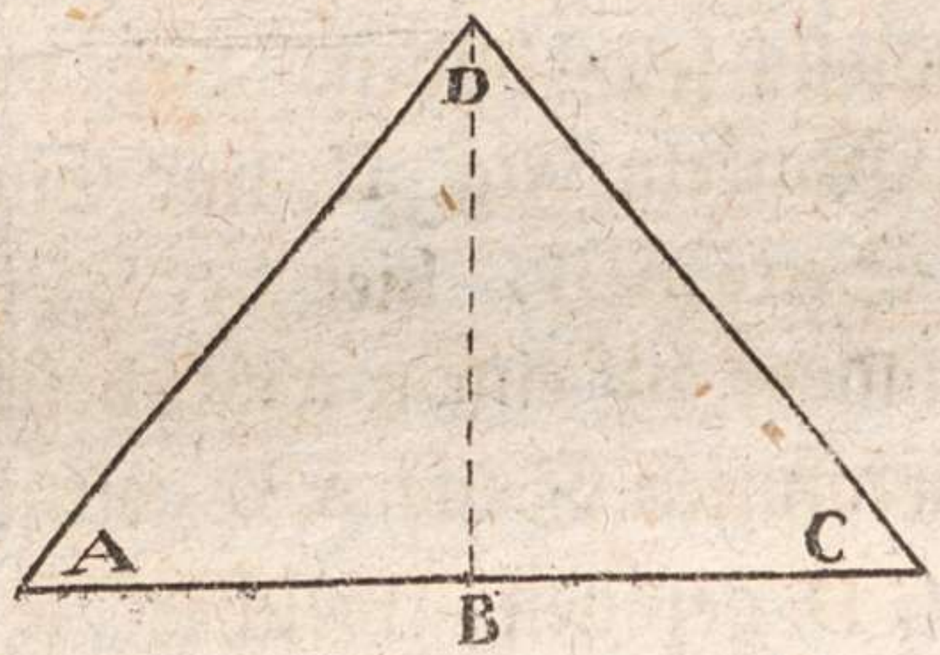
100. **Lehrsatz.** **Ist in einem Dreyecke nur Eine Seite und zwey Winkel gegeben; so ist wieder das ganze Dreyeck bekannt.**

Beweis. Fig. I. Liegen die beyden Winkel A und B auf der bekannten Seite A B; so wird sich der dritte Winkel, und die Länge der beyden Seiten durch die Verlängerung der beyden Schenkel, die sich in einem bestimmten Punkte O durchschneiden werden, von sich selbst bilden. Liegt von den zwey bekannten Winkeln Fig. II. nur Einer auf der bekannten Seite A B, hier der Winkel A; so wird der andere auf einem willkührlichen Punkte der unbekannten Seite A C gesetzt, und der Schenkel C D gezogen, welcher die Linie A B in D schneidet. Wird nun aus dem Punkte B eine Parallellinie mit D C gemacht; so bestimmt diese wieder das ganze Dreyeck A E B.

101. **Zusatz.** Wenn also eine Seite und zwey Winkel in einem Dreyecke gleich sind einer Seite und zweyen Winkeln in einem andern Dreyecke; so sind auch beyde Dreyecke einander gleich und ähnlich.

102. Lehrsatz. In gleichen und ähnlichen Dreyecken stehen gleichen Winkeln gleiche Seiten, und gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber.

Beweis. Legt man die gleichen Seiten zusammen, so werden sich die gleichen Winkel einander decken; und legt man die gleichen Winkel zusammen, so geschieht dieß mit den gleichen Seiten.

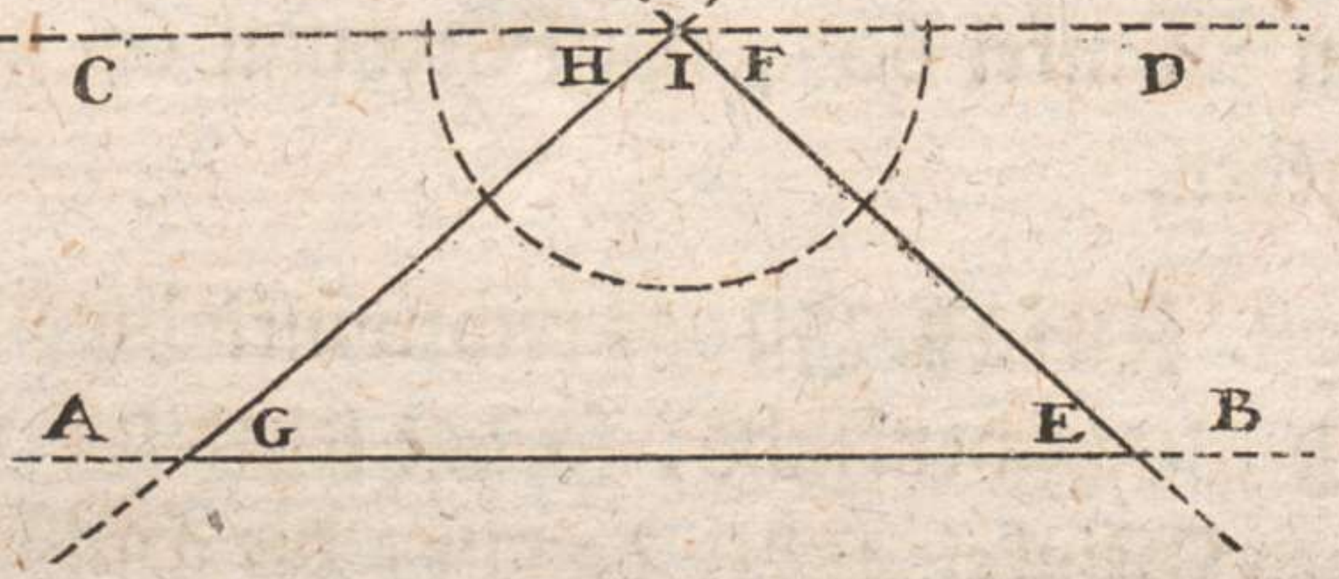


103. Lehrsatz. In dem gleichschenklichten Dreyecke sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich. A = C.

Beweis. Theilt man die Grundlinie in zwey gleiche Theile, und zieht aus dem gegenüberstehenden Winkel eine Linie auf den Theilungspunkt; so erhält man zwey Dreyecke, wo A B = B C wegen der gleichen Abtheilung, A D =

C D wegen den gleichen Schenkeln, und B D = B D, das ist, beyden gemein ist. Es sind also auch nach S. 48 Nro. 97 die drey Winkel einander gleich, und beym Aufeinanderlegen wird der Winkel A den Winkel C decken.

104. **Zusatz.** In dem gleichseitigen Dreyecke sind alle drey Winkel einander gleich; weil dasselbe auch gleichschenklicht ist, und alle drey Winkel durch Verwendung des Dreyeckes zu Winkeln an der Grundlinie gemacht werden können.



105. **Lehrsatz.** Die drey Winkel in einem Dreyecke halten zusammen 180°.

Beweis. Man verlängere alle drey Seiten des Dreyeckes, und ziehe mit der Grundlinie A B an der Spitze des obern Winkels eine Parallellinie C D; so werden diese beyden Parallellen durch E I und G I durchschnitten, und bilden bey E und F, G und H Wechselwinkel, welche, wie wir oben erwiesen haben, einander gleich sind. Man kann also anstatt dem Winkel E, den Winkel F, und anstatt G, den Winkel H setzen. Da sich nun aus der Spitze I ein hal-

ber Kreisbogen um alle drey Winkel beschreiben läßt, welcher 180° hält; so ist es klar, daß die drey Winkel zusammen 180° ausmachen.

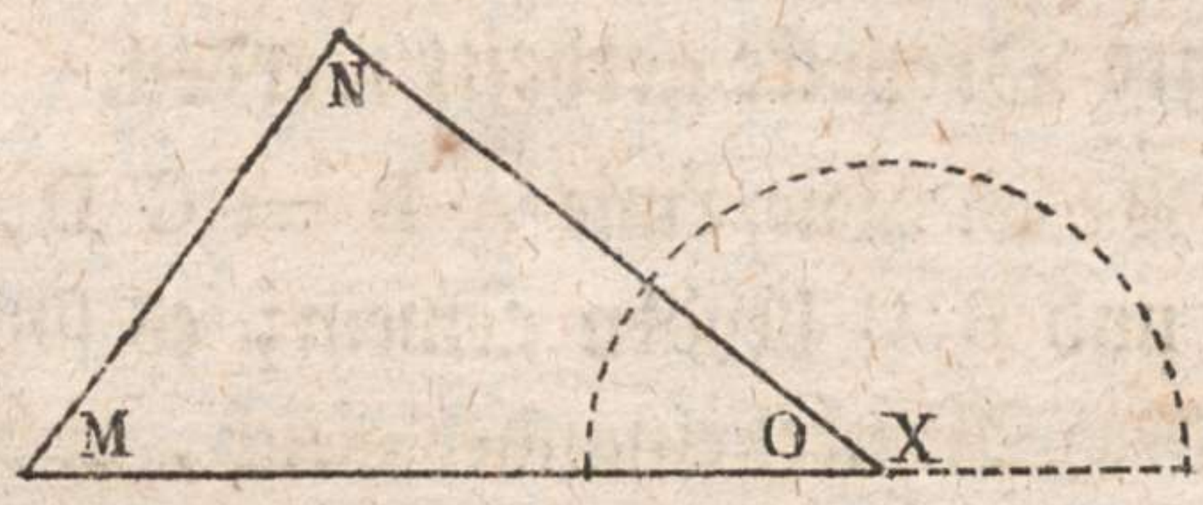
106. Zusatz. In einem Dreyecke können also niemahls zwey rechte oder zwey stumpfe Winkel seyn, weil diese schon 180°, oder darüber ausmachen, und folglich für den dritten Winkel nichts mehr übrig bleiben würde.

107. Zusatz. In gleichseitigen Dreyecken hält ein Winkel 60°, weil dreymal 60 genau 180° geben.

108. Zusatz. Ist das rechtwinklichte Dreyeck auch gleichschenklicht; so hat jeder der übrigen zwey Winkel 45°, das ist, die Hälfte des rechten Winkels, weil 90° und zweymahl 45° zusammen 180° ausmachen.

109. Zusatz. In dem gleichschenklichten Dreyecke sind alle drey Winkel bekannt, wenn Einer bekannt ist. Denn ist es der an der Spitze; so sind die beyden an der Grundlinie der Rest von 180°. Ist einer an der Grundlinie bekannt; so nimmt man ihn doppelt, und zieht ihn von 180° ab, wodurch man den Winkel an der Spitze erhält. Ist also in dem gleichschenklichten Dreyecke Eine Seite und Ein Winkel gegeben; so bilden sich die übrigen Seiten und Winkel beym Aufzeichnen von sich selbst.

110. Zusatz. Da sich ein jedes Viereck durch eine Diagonallinie in zwey Dreyecke zertheilen läßt, wovon die Winkel eines jeden 180° halten; so sind die 4 Winkel eines Viereckes gleich 360°. Trägt man also die Winkel eines Viereckes um einen gemeinschaftlichen Punkt; so nehmen sie einen ganzen Kreisbogen, und die eines Dreyeckes einen halben Kreisbogen ein.



111. Lehrsatz. Der äußere Winkel, welcher in einem Dreyecke durch die Verlängerung einer Seite entsteht, ist gleich den zwey innern entgegen gesetzten. X = M + N.

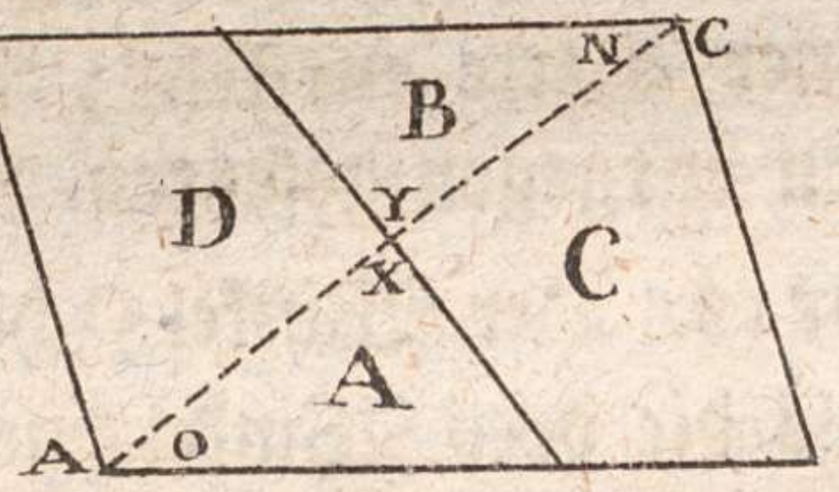
Beweis. Der Winkel O hält mit M und N 180°, als die drey Winkel eines Dreyeckes; es hält aber auch O mit X 180° als Nebenwinkel: folglich muß X so groß seyn, als M und N zusammen genommen; weil der Winkel O überall abgezogen werden kann.

112. Zusatz. Ist der äußere Winkel eines gleichschenklichten Dreyeckes gegeben; so sind wieder alle drey Winkel desselben bekannt, weil entweder einer an der Grundlinie, oder der an der Spitze als Nebenwinkel bekannt wird,

und die übrigen durch Subtraktion von 180°
zum Vorschein kommen.

113. **Lehrsatz.** Ein jedes Parallelogram kann durch eine Diagonallinie in zwey kongruente Dreyecke getheilt werden.

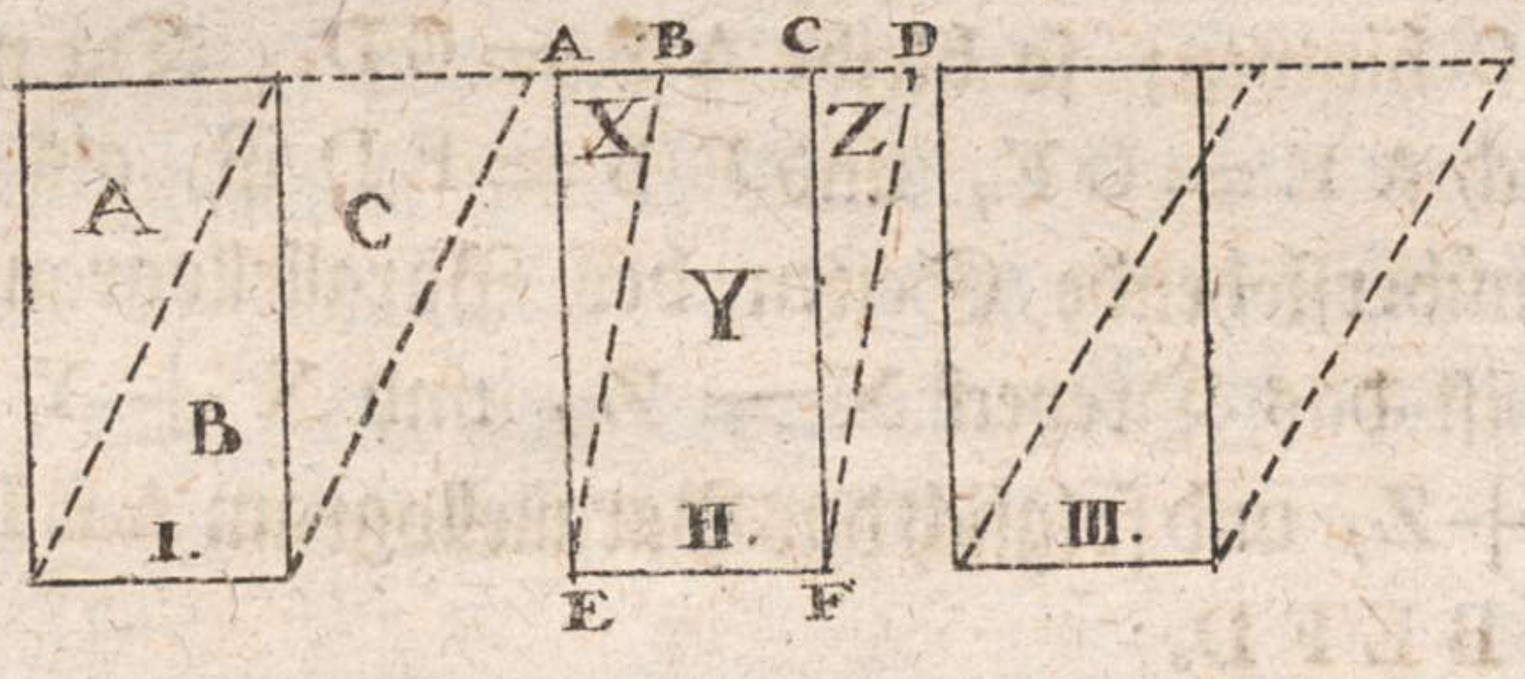
Beweis. Die Linie A B = C D, A C = B D, und B C beyden gemein; es sind also auch die drey Winkel einander gleich, und folglich das Dreyeck A C B ≅ B C D.



114. **Lehrsatz.** Wenn in einem Parallellograme eine Linie, wie immer, durch den Mittelpunkt der Diagonallinie gezogen wird, so ist dasselbe in zwey gleiche Theile getheilt.

Beweis. Das Dreyeck A ist gleich dem Dreyecke B; weil die Vertikalwinkel X = Y, die Wechselwinkel O = N, und die Seite A X = Y C, folglich zwey Winkel und eine Seite einander gleich sind. Es ist ferner

$A + C = B + D$. Nimmt man die gleichen Theile A und B hinweg, welches nach dem dritten Grundsatze, Seite 42, ohne Verletzung der Gleichheit geschehen kann, so ist $C = D$. Wird nun zu C das B, und zu D das A hinzu gethan; so erscheint $A + D = C + B$.

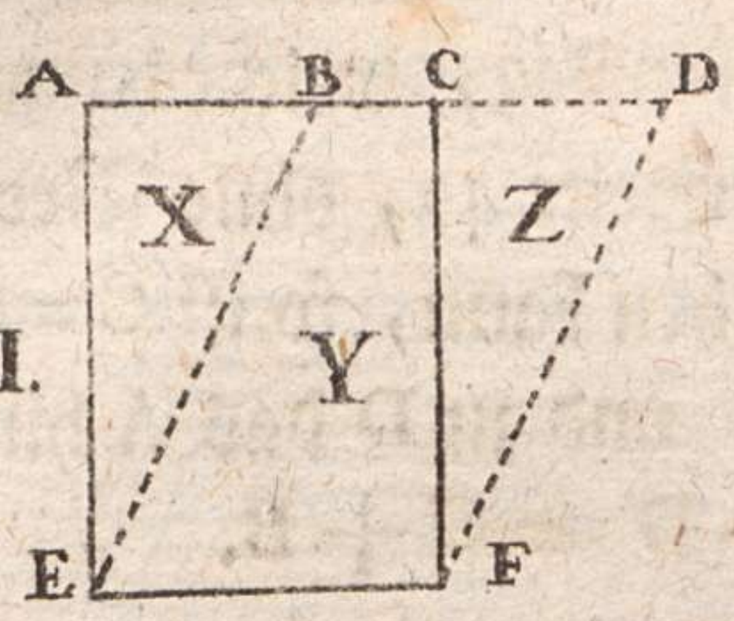


115. Lehrsatz. Parallellograme von einerley Grundlinie und Höhe sind einander gleich.

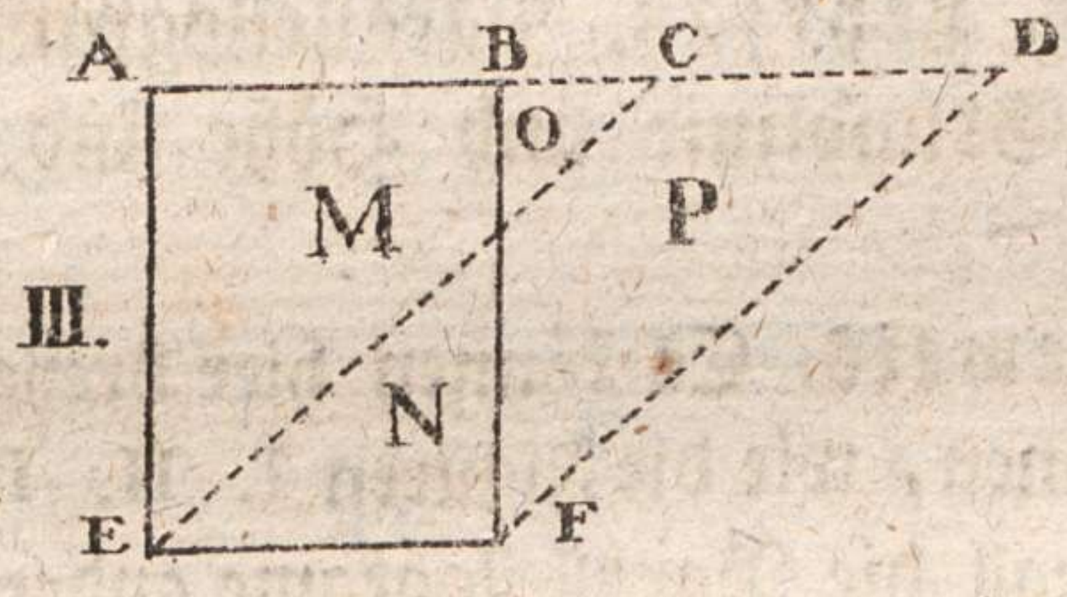
Beweis. Es können hier dreyerley Fälle vorkommen, wie die Figuren I. II. III. zeigen, wo überall die Parallellograme anders verschoben sind.

Bey der Figur I. ist das Dreyeck $A = B$, und $B = C$ wegen den Diagonallinien, welche die Parallellograme in zwey gleiche Dreyecke zertheilen; es ist also auch $A = C$, und folglich $A + B = B + C$.

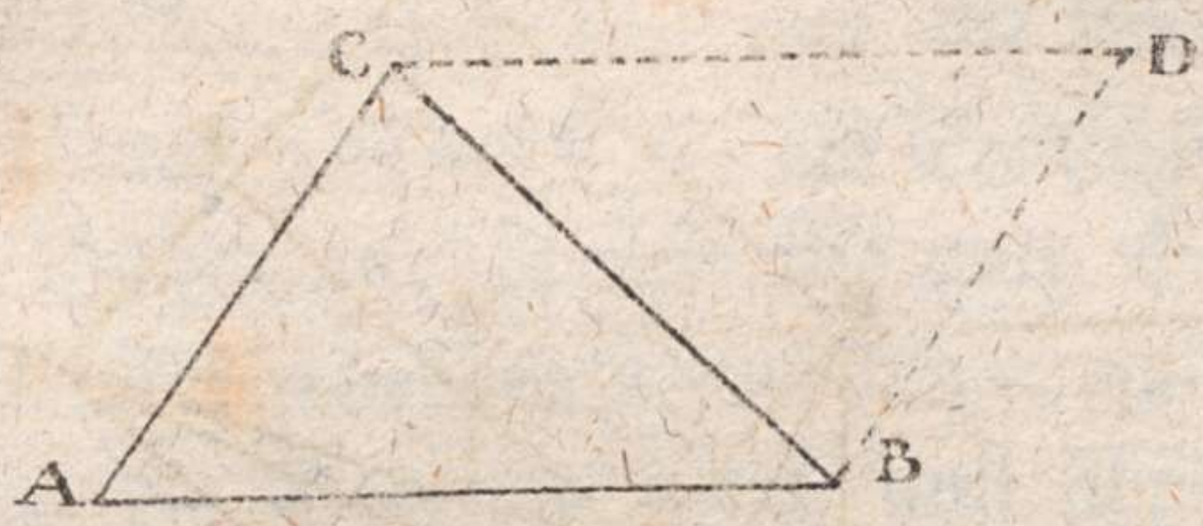
In der Figur II. ist $A C = E F$, und $B D = E F$, als gegenüber stehende Seiten eines Parallelograms; es ist also auch $B D = A C$. Nimmt man von beyden Gleiches, nähmlich



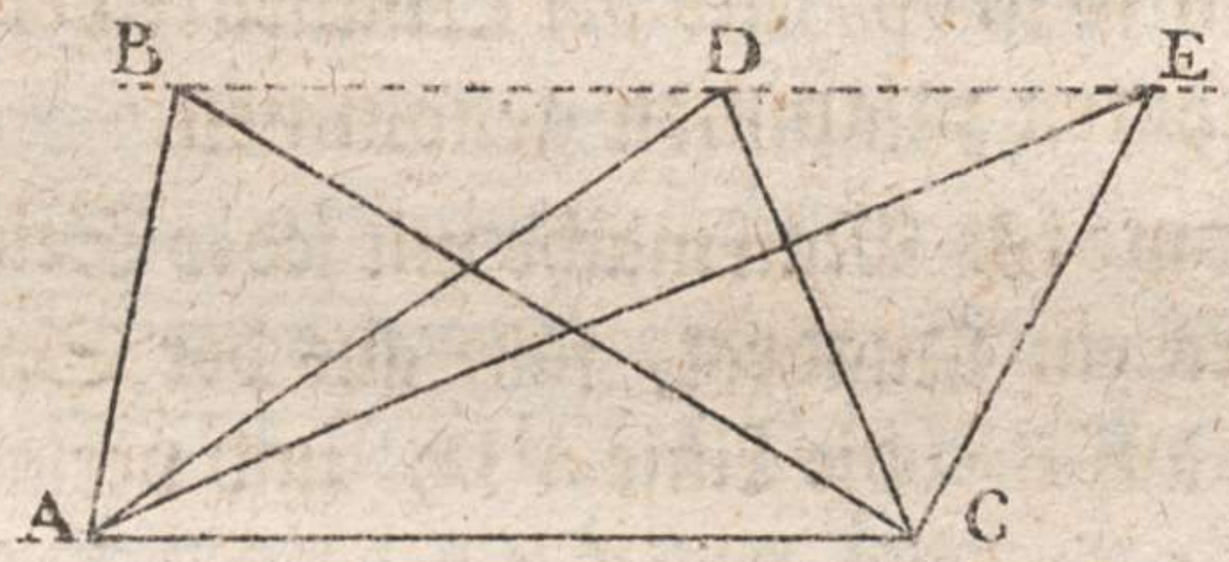
B C hinweg; so bleibt A B = C D. Da nun auch A E = C F, und E B = F D ist, als gegenüberstehende Seiten des Parallellograms; so ist das Dreyeck X = Z, und X + Y = Y + Z, und folglich das Parallellogram A E F C = B E F D.



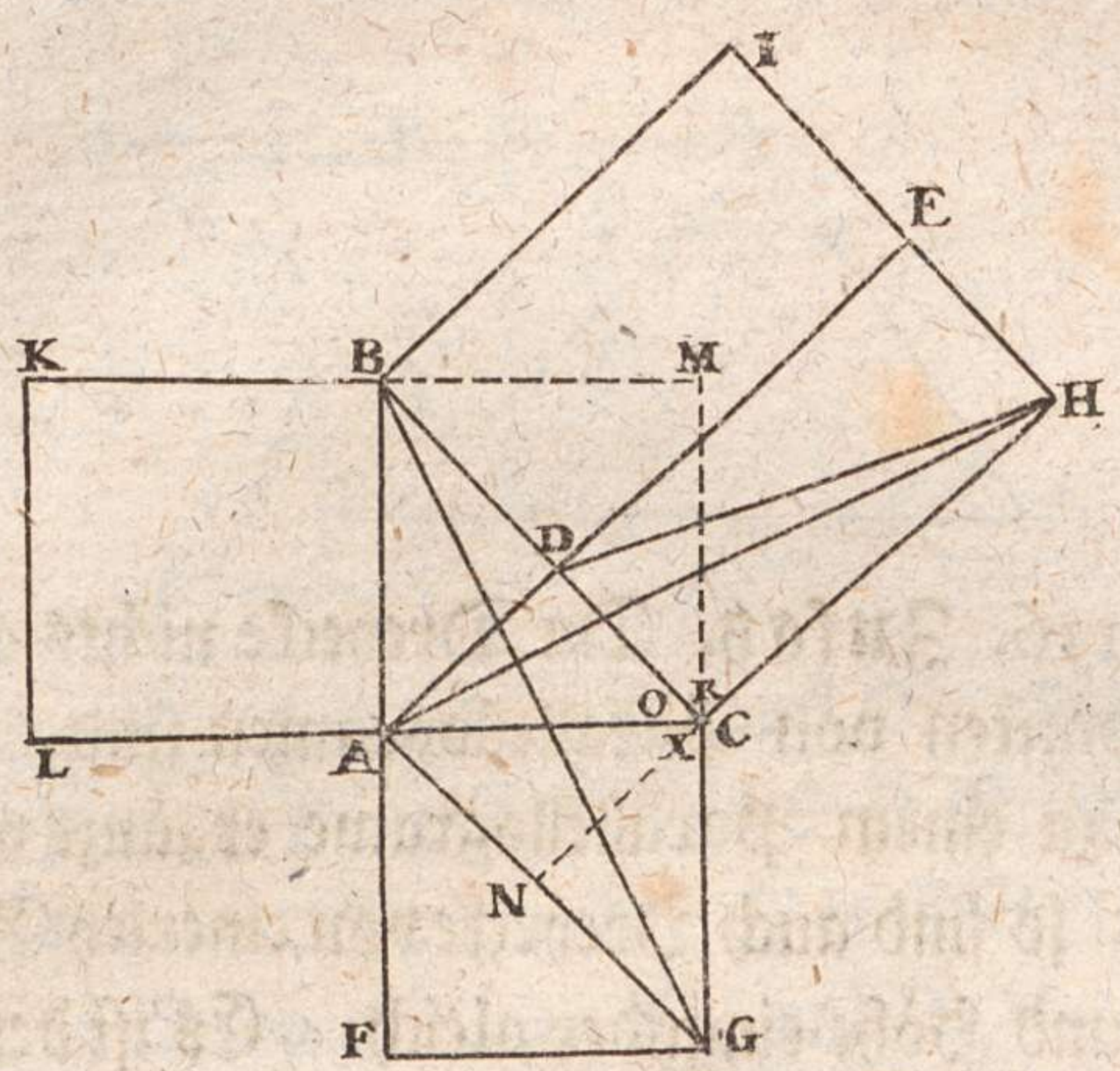
In der Figur III. ist wieder aus den obigen Ursachen E F = C D, und C D = A B. Setzt man zu A B und C D überall Gleiches, nähmlich B C hinzu; so ist A C = B D. Da nun auch A E = B F, und E C = F D ist; so sind die Dreyecke A E C und B F D einander gleich. Nimmt man von beyden das Dreyeck O hinweg, und setzt zu jedem das Dreyeck N hinzu, welches ohne Schaden der Gleichheit geschehen kann; so ist M + N = P + N, und folglich das Parallellogram A E F B = E C D F.



116. **Zusatz.** Da Dreyecke nichts anders als Hälften von Parallellogramen sind, indem jedes zu einem Parallellograme ergänzt werden kann; so sind auch Dreyecke von einerley Grund-Linie und Höhe einander gleich. Es ist demnach das Dreyeck A B C = C B D.



117. **Zusatz.** Weil Dreyecke zwischen Parallellen allemahl eine gleiche Höhe haben, so sind alle Dreyecke zwischen denselben, wenn sie auf gleichen Grundlinien stehen, einander gleich, wie A B C, A D C, A E C. Die Anwendung dieser Zusätze wird gleich in dem Beweise des folgenden Lehrsatzes vorkommen.



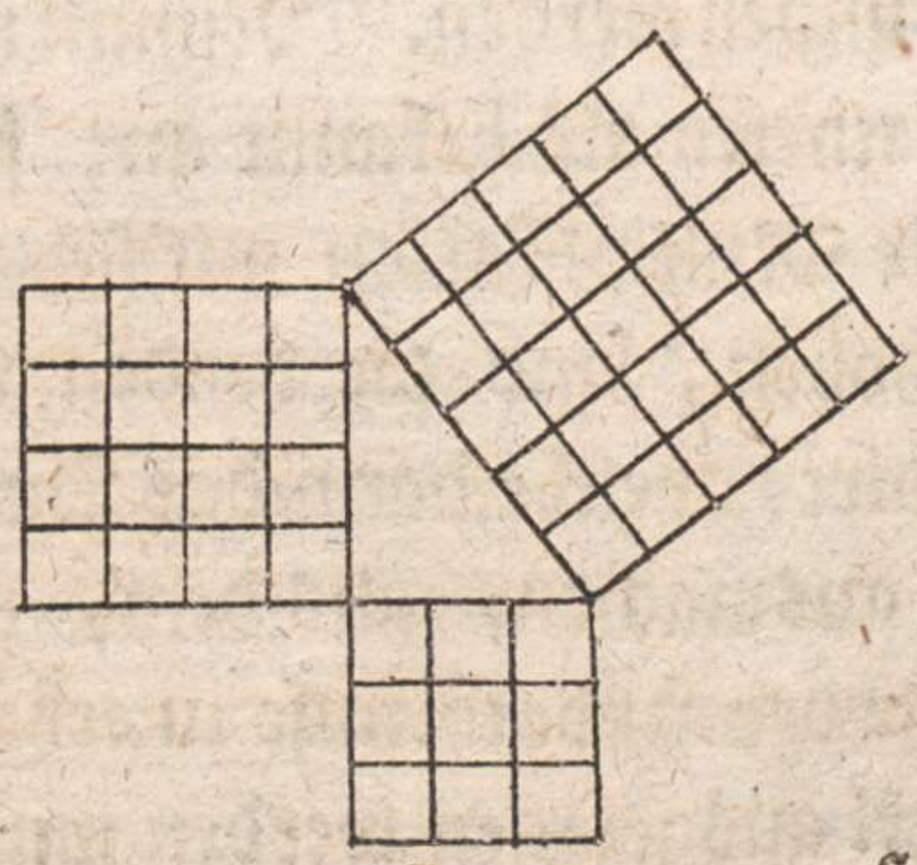
118. **Lehrsatz. In jedem rechtwinklichten Dreyecke ist das Quadrat der Hypothenus eben so groß, als die Quadrate der beyden Katheten zusammen genommen.**

Beweis. Man mache mit jeder Seite des Dreyeckes ein Quadrat, fälle aus der Spitze A senkrecht auf B C die Linie A D, und verlängere sie bis E; so kann erwiesen werden: daß das Quadrat A F G C gleich ist dem Rechtecke D C H E.

Man ziehe die Linien B G und A G, dann A H und D H; so ist das Dreyeck B G C = A G C, wegen einerley Grundlinie C G und Höhe A C = B M. Ferners ist A H C = D H C, weil wieder gleiche Grundlinien C H und Höhen D C = A N vorhanden sind. Nun ist aber das stumpfwinklichte Dreyeck B G C = A H C; denn X = R, als rechte Winkel, und O ist bey

den Dreyecken gemein, folglich der stumpfe Winkel O + X = O + R, und die Seiten C H = C B und C G = C A, als Seiten des nähmlichen Quadrats; es sind also zwey Seiten und ein Winkel in beyden Dreyecken einander gleich, folglich die Dreyecke gleich und ähnlich; daher müssen auch die mit ihnen gleichen Dreyecke A G C und D C H einander gleich seyn. Da nun die einen Hälften dieser Parallellograme einander gleich sind; so sind es auch die andern, weil sie durch die Diagonallinien A G und D H in zwey gleiche Theile abgetheilt werden, folg= A F G C = C D E H.

Der Beweis von der Gleichheit der übrigen zwey Parallellograme A B K L, und B D E I, ist ganz der nähmliche. Es ist also das Quadrat A F G C gleich dem länglichten Vierecke C D E H, und B D E I gleich B A L K, folglich beyde Quadrate zusammen gleich dem Quadrate der Hypothenuse.



119. Zusatz. Setzt man auf eine Lothlinie des rechten Winkels 3 gleiche Theile, auf die an-

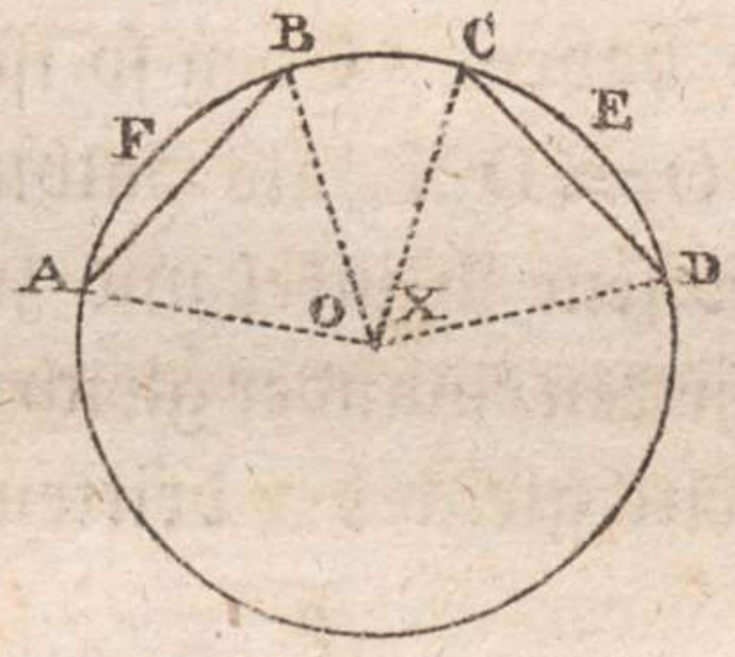
dere 4, und zieht die Hypothenuse; so hält diese genau 5 solcher Theile. Zeichnet man die Quadrate wirklich; so hat man auf der Hypothenuse 25 Quadrate, auf einer Kothlinie aber 9, und auf der andern 16, welche zusammen ebenfalls 25 geben. So oft man also drey Linien zusammen setzt, wovon eine 3 Theile, die andere 4, und die dritte 5 solcher Theile hält; so entsteht der längsten Seite gegenüber ein rechter Winkel. Eben dieses geschieht auch, wenn man diese drey Zahlen mit was immer für einer andern Zahl multiplizirt, z. B. mit 4, wodurch 12, 16 und 20 entstehen, die bey der Zusammensetzung ebenfalls rechte Winkel geben.

120. Zusatz. Das Quadrat Eines Katheten ist so groß, als das Quadrat der Hypothenuse, weniger dem Quadrate des andern Katheten. Sind also in einem rechtwinklichten Dreyecke zwey Linien gegeben; so kann die dritte durch Rechnung gefunden werden. Nimmt man z. B. die beyden Katheten als bekannt an; so werden diese durch die Multiplikation mit sich selbst zum Quadrate erhoben, und die beyden Quadrate zusammen addirt, welche dann das Quadrat der Hypothenuse ausmachen, aus dem, um die eigentliche Länge der Hypothenuse zu erhalten, die Quadratwurzel ausgezogen werden muß.

Anmerkung. Der angeführte Lehrsatz heißt von seinem Erfinder Pythagoras, der pythagorische Lehrsatz.

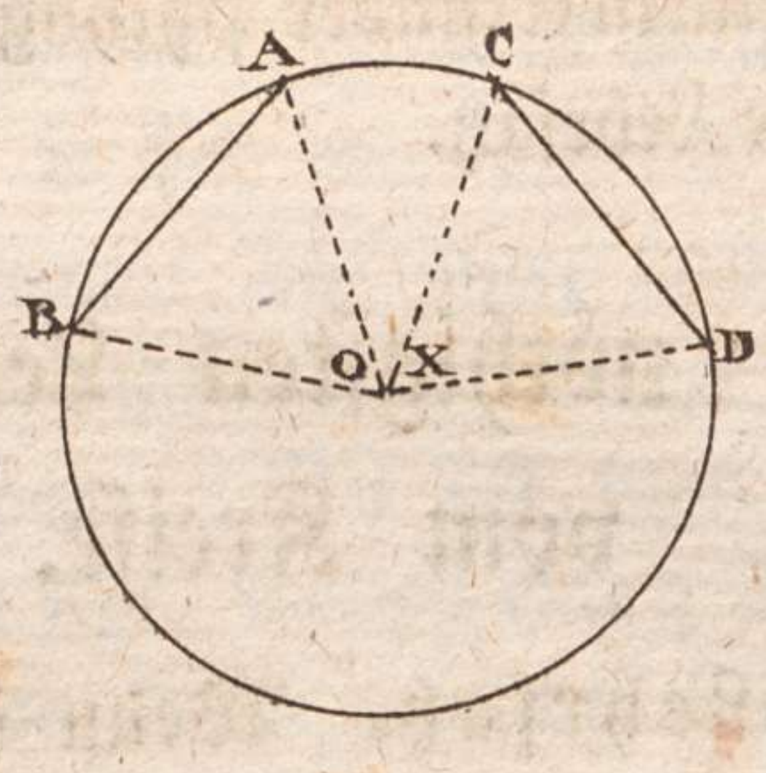
Die nöthigsten Lehrsätze vom Kreise.

121. Lehrsatz. Wenn in einem und dem nähmlichen Kreise zwey Sehnen einander gleich sind; so sind es auch die dadurch abgeschnittenen Bogen, und umgekehrt, wenn die Bogen einander gleich sind; so sind es auch die Sehnen.

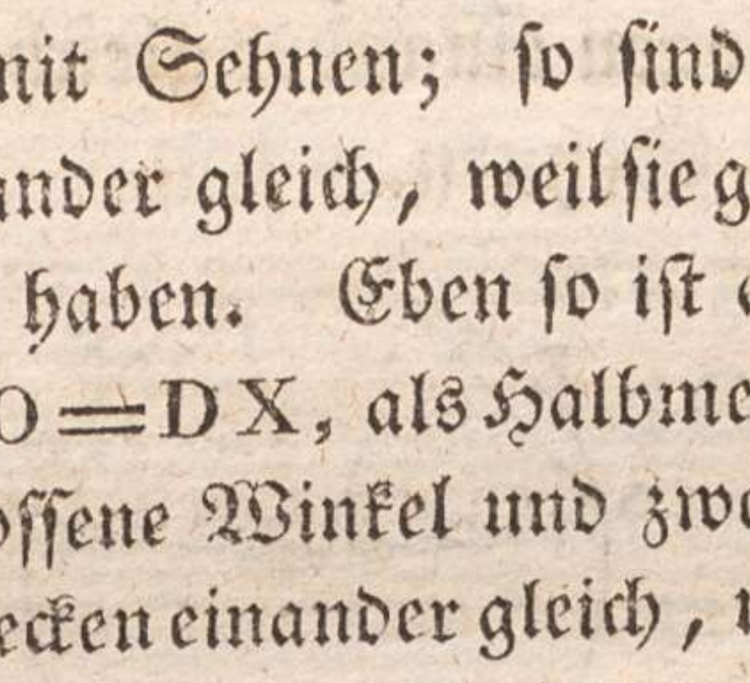


Beweis. Man setze, die Sehnen AB und CD seyen einander gleich, so ist, wenn man von denselben die Halbmesser auf den Mittelpunkt zieht, das Dreyeck AOB = CXD; weil außer den Seiten AB und CD auch die Halbmesser, welche die Dreyecke bilden, alle einander gleich sind. Da die Seiten einander gleich sind; so sind es auch die Winkel, folglich der Winkel X = O, also auch das Maaß die-

ser Winkel, nähmlich die Bogen A F B = C E D.



Sind die Bogen einander gleich, so sind es auch die Sehnen; denn zieht man wieder die Halbmesser, und verbindet die Endes-Punkte der Bogen mit Sehnen; so sind die Winkel O und X einander gleich, weil sie gleiche Bogen zum Maaße haben. Eben so ist auch A O = C X, und B O = D X, als Halbmesser: folglich der eingeschlossene Winkel und zwey Seiten in beyden Dreyecken einander gleich, und also auch die dritte Seite gleich der dritten; das ist, A B = C D.



122. Lehrsatz. Wenn eine Sehne A B durch eine Senkrechte E C in zwey gleiche Theile getheilt, und gehörig verlängert wird; so

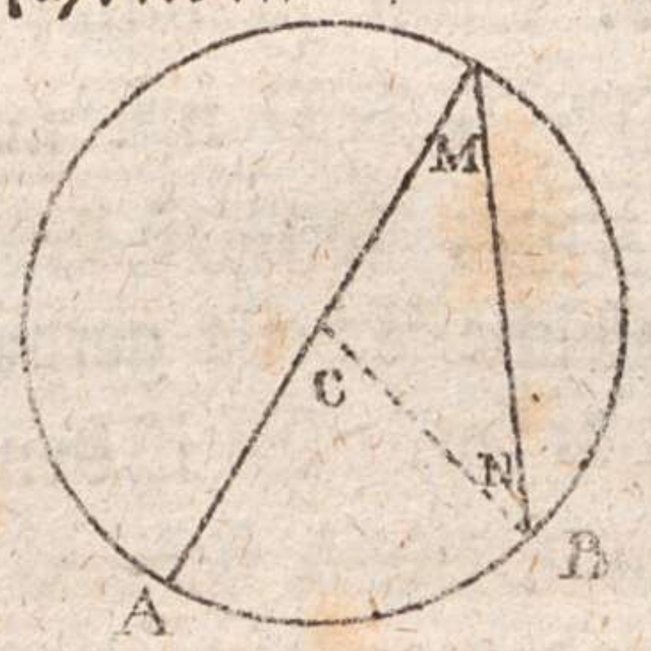
geht sie durch den Mittelpunkt des Kreises, und wird dadurch zum Durchmesser.

Beweis. Man verbinde die Sehne A B und die Senkrechte E D mit andern Sehnen, wie die Figur zeigt; so wird vorausgesetzt, daß A B in zwey gleiche Theile getheilt, und E C D senkrecht auf A B sey. Es ist demnach der Winkel O = N, die Seite A C = C B, und E C = E C, oder beyden gemein, und daher beyde Dreyecke gleich und ähnlich; weil sie zwey Seiten und den eingeschlossenen Winkel mit einander gleich haben. Eben so verhält es sich auch mit den beyden Dreyecken A C D und B C D, wo A C = B C, C D = C D, und X = M, also auch diese zwey Dreyecke kongruent sind. Da nun die Sehnen A E = E B, und A D = B D, so sind auch ihre gegenüber stehenden Bögen einander gleich; folglich A G E = E H B, und A K D = B I D, also zusammen E G A K D = E H B I D. Die Linie E D theilt folglich den Kreis in zwey gleiche Theile, und wird zum Durchmesser; das heißt: sie geht durch den Mittelpunkt des Kreises.

123. Zusatz. Jeder Durchmesser, der eine Sehne senkrecht durchschneidet, theilt sowohl diese, als den Bogen in zwey gleiche Theile.

Auf diesem Lehrsatze beruhen die Auflösungen der obigen Aufgaben; den Mittelpunkt ei-

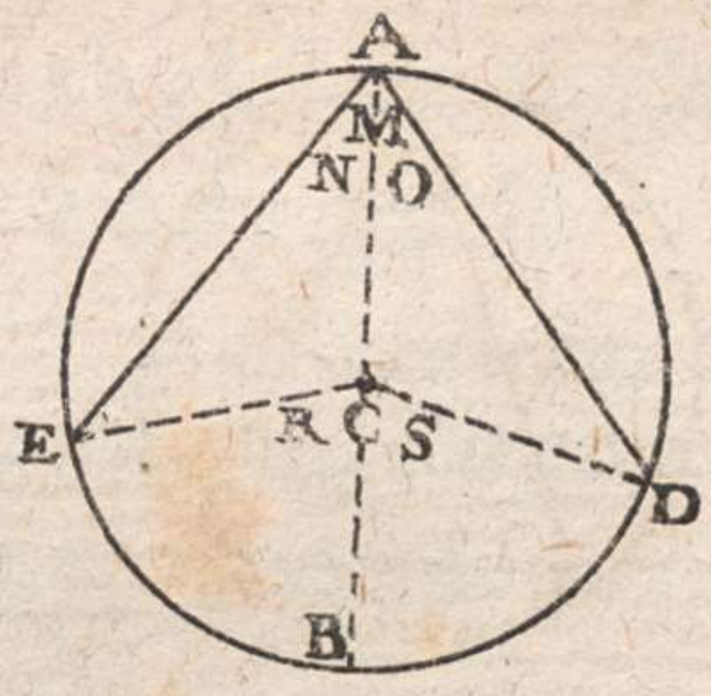
nes Kreises oder eines Bogens zu finden; durch drey gegebene Punkte, und um ein Dreyeck einen Kreis zu beschreiben.



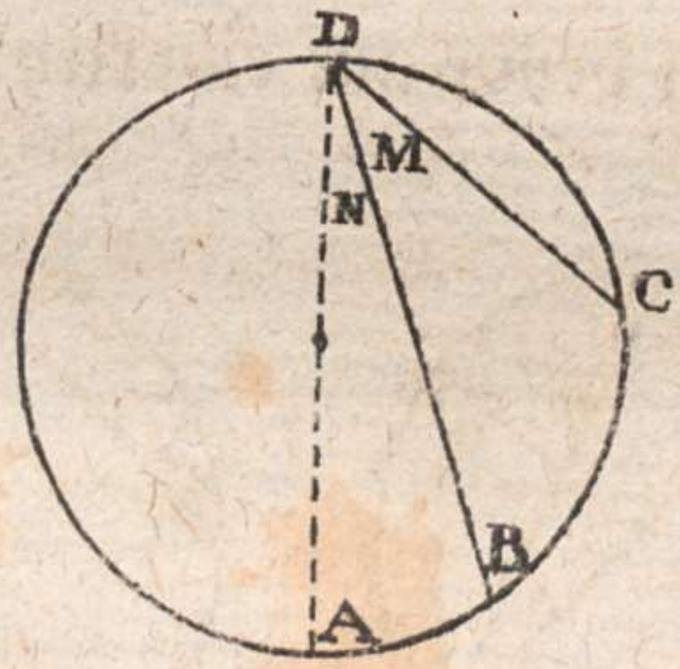
124. **Lehrsatz.** Die Winkel an der Peripherie haben den halben Bogen zum Maaße, den ihre verlängerten Schenkel abschneiden.

Beweis. Hier können dreyerley Fälle vorkommen: der erste ist, wenn ein Schenkel durch den Mittelpunkt geht; der zweyte, wenn sich der Mittelpunkt zwischen den beyden Schenkeln befindet; und der dritte, wenn beyde Schenkel außer den Mittelpunkt fallen.

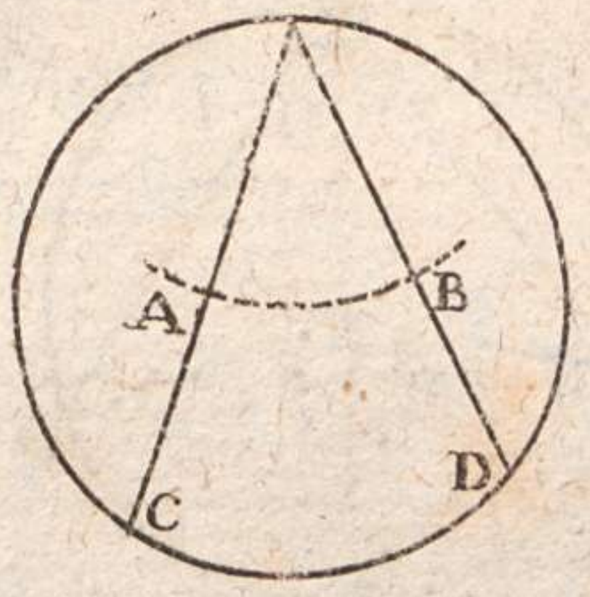
Im ersten Falle ist der Winkel C, wenn man die Linie C B zieht, als äußerer Winkel eben so groß, als die zwey innern M und N zusammen genommen. Da aber das Dreyeck C M N wegen den beyden Halbmessern C M und C N gleichschenklicht ist; so ist der Winkel M = N, und also M halb so groß als C. Es hat aber C den ganzen Bogen A B zu seinem Maaße, und folglich muß M die Hälfte desselben haben.



Im zweyten Falle ziehe man die Linie A B durch den Mittelpunkt, und verbinde die Sehnen mit den Linien C D und C E, so hat man den obigen Fall doppelt. Denn es ist S noch so groß, als O, und R noch so groß, als N; folglich der ganze Winkel M nur die Hälfte des ganzen Winkels C, und das Maaß von M der halbe Bogen E B D.

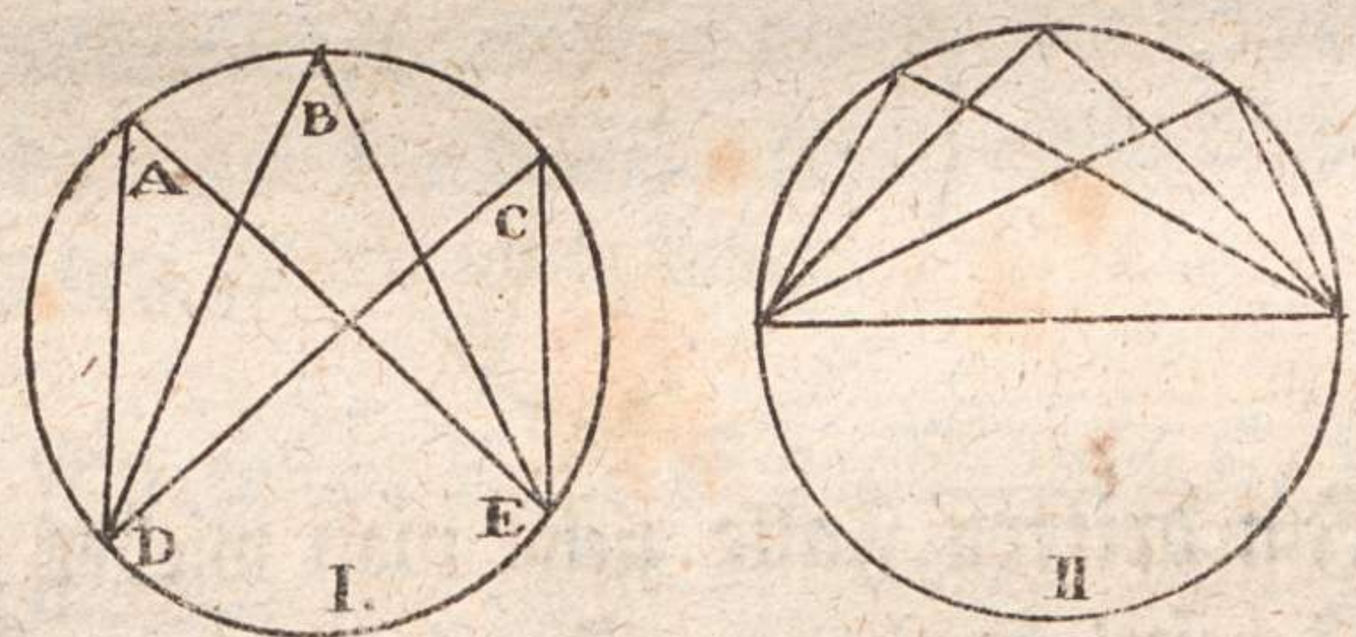


Im dritten Falle ziehe man wieder aus dem Scheitel durch den Mittelpunkt eine Linie D A; so haben nach obigen Beweisen die beyden Winkel M und N zusammen den halben Bogen A B C. Läßt man den Winkel N hinweg, folglich auch den Bogen A B; so bleibt für den Winkel M die Hälfte des Bogens B C.



125. **Zusatz.** Zieht man mit dem Halbmesser des Kreises aus dem Scheitelpunkte eines Winkels an der Peripherie einen Bogen A B; so ist dieser das eigentliche Maaß dieses Winkels, und die Hälfte des Bogens C D.

126. **Zusatz.** Der Winkel am Mittelpunkte, den man auch Zentriwinkel nennt, ist also noch so groß, als der Winkel an der Peripherie, wenn beyde auf einerley Bögen stehen.

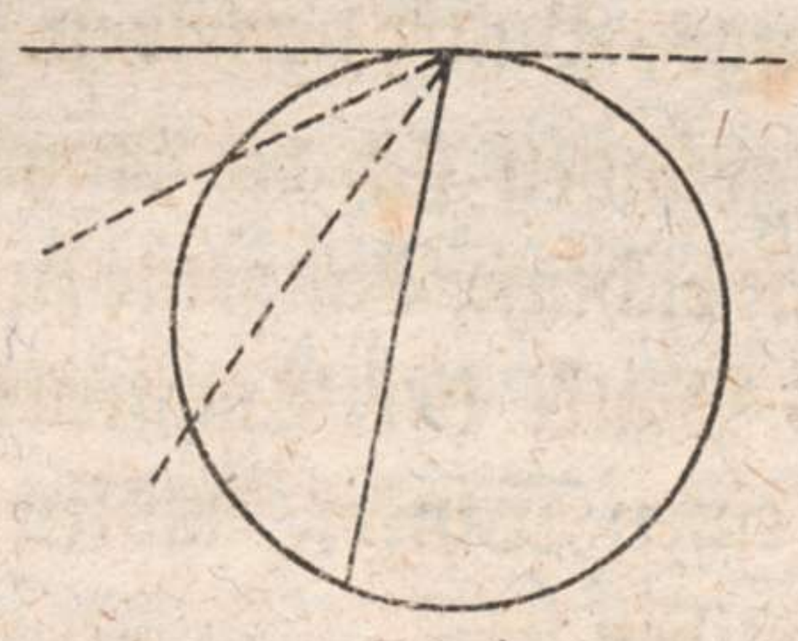


127. **Zusatz.** Alle Winkel an der Peripherie, welche auf einerley Bögen stehen, sind einander gleich; es ist also A = B = C, weil alle den halben Bogen D E zum Maaße haben. Fig. I.

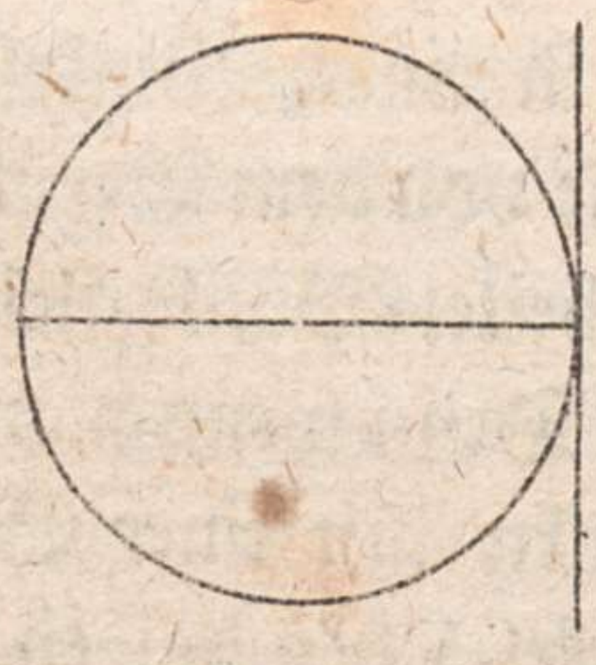
128. **Zusatz.** Stehen die Winkel auf dem Durchmesser; so sind sie lauter rechte, weil sie

die Hälfte des halben Kreisbogens, das ist, 90° zum Maaße haben. Fig. II.

Dieß ist der Grund der Auflösungen der obigen Aufgaben, einen rechten Winkel am Ende einer Linie zu errichten, und ein Winkelmaaß zu prüfen.



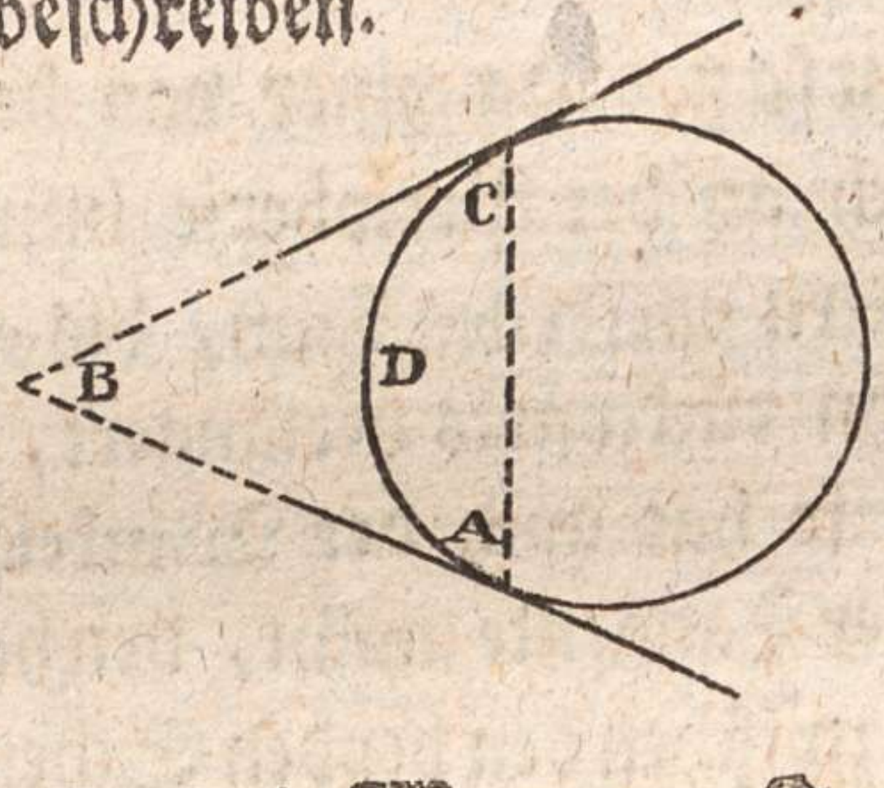
129. Zusatz. Da einer von den beyden Schenkeln sich an der Peripherie immer weiter von dem andern entfernen kann, bis er endlich, wenn man ihn rückwärts verlängert, zur Tangente wird; so hat auch der Winkel, den eine Sehne mit der Tangente macht, den halben Bogen, welcher zwischen den beyden Schenkeln liegt, zum Maaße.



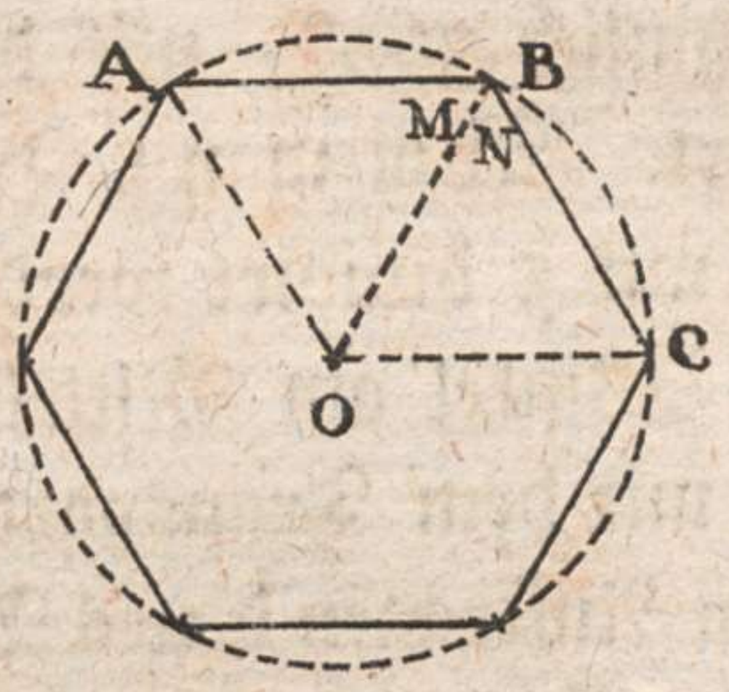
130. Zusatz. Es ist also der Winkel, den der Durchmesser mit einer Tangente macht, ein rechter Winkel, weil er die Hälfte des halben

Kreisbogens, das ist, 90° zum Maaße hat. Jeder Durchmesser, und auch jeder Halbmesser, weil er zum Durchmesser verlängert werden kann, steht daher senkrecht auf seiner Tangente. Fällt man aus dem Mittelpunkte eine Senkrechte auf die Tangente; so geht diese durch den eigentlichen Berührungs-Punkt derselben.

Hierauf gründen sich die Auflösungen der Aufgaben: eine richtige Tangente zu ziehen; den Berührungs-Punkt der Tangente zu finden; einen Kreis in einen Winkel, und in ein Dreyeck hinein zu beschreiben.



131. **Zusatz.** Wenn zwey Tangenten durch Verlängerung in einen Winkel zusammen stossen; so haben sie von dem Berührungs-Punkte bis an den Scheitel-Punkt gleiche Länge; A B ist gleich C B. Denn wenn man die beyden Berührungs-Punkte mit einer Sehne verbindet; so hat der Winkel A den halben Bogen A D C, und der Winkel C den nähmlichen halben Bogen C D A zum Maaße; folglich ist A = C, und das Dreyeck gleichschenklicht.



132. **Lehrsatz.** Wenn aus dem Mittelpunkte eines um ein regelmäßiges Vieleck beschriebenen Kreises die Halbmesser in die Winkel des Vieleckes, die man hier Polygonwinkel nennt, gezogen werden: so entstehen lauter gleiche Dreyecke, und die Polygonwinkel werden in zwey gleiche Theile getheilt.

Beweis. Die Seite A B = B C, als Seiten eines regelmäßigen Vieleckes; die Halbmesser A O, O B und O C sind ebenfalls einander gleich; folglich die Dreyecke kongruent, und der Winkel M = N; und also der Polygonwinkel in zwey gleiche Theile zertheilt.

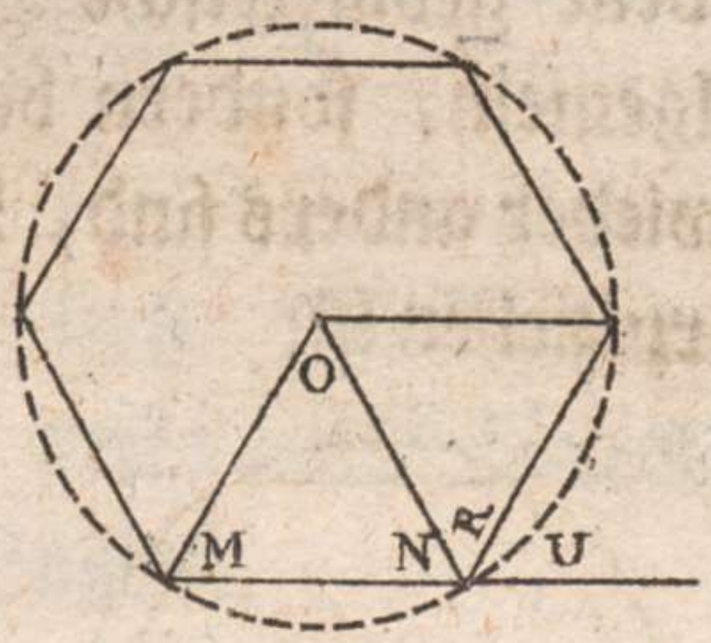
133. **Zusatz.** Theilt man daher ein Paar Polygonwinkel in zwey gleiche Theile, und verlängert die Theilungslinien, bis sie sich einander durchschneiden; so hat man den Mittelpunkt des Polygons.

134. **Zusatz.** Da das Polygon eben so viele Winkel am Mittelpunkte, als Seiten hat; so kann die Anzahl der Grade eines solchen Winkels gefunden werden, wenn man den ganzen

Umkreis, nähmlich 360°, mit der Anzahl der Seiten dividirt. Will man z. B. ein Fünfeck; so muß 360 mit 5 dividirt werden; wo man 72° als den Winkel am Mittelpunkte erhält, welchen man mit dem Transporteur auftragen kann. Beym Auftragen dieses Winkels mache man zuvor einen Kreis mit dem nähmlichen Halbmesser, womit auf dem Transporteur der Kreis gezeichnet ist, und trage die 72° von dem Transporteur auf denselben; so wird dieser dadurch genau in 5 gleiche Theile getheilt werden.

135. **Anmerkung.** Da bey manchen Vielecken außer den Graden in der Berechnung auch noch Minuten vorkommen, und der Transporteur nur in Grade eingetheilt ist; so kann man von diesem Verfahren nur selten Gebrauch machen. Man bedient sich daher in der Mechanik, wo die Theilungen der Kreise am meisten vorkommen, viel bequemer und sicherer der Unter-Abtheilungen, wie wir bereits bey der Verzeichnung der regelmäßigen Vielecke gezeigt haben. Die Eintheilung in ungleiche Theile vermeidet man so viel als möglich, und bedient sich ihrer nur selten bey Getrieben, wo nur eine kleine Anzahl von Theilen nöthig ist, nie aber bey Kamm- und Stirnrädern. Wollte man auch den Winkel nach Graden und Minuten durch einen richtigen Sehnen-Maaßstab noch so genau auftragen; so würden die Theile wegen der ungewissen

Zirkelumschläge am Ende doch nicht eintreffen; daher die obige Art mit Unter-Abtheilungen, und bey wenigen ungleichen Theilen mit Zirkel-Versuchen, für die gewöhnlichen Fälle die bequemste und anwendbarste ist.



136. Lehrsatz. Der Polygonwinkel ist gleich 180° weniger dem Winkel am Mittelpunkte. $N + R = 180° - O$.

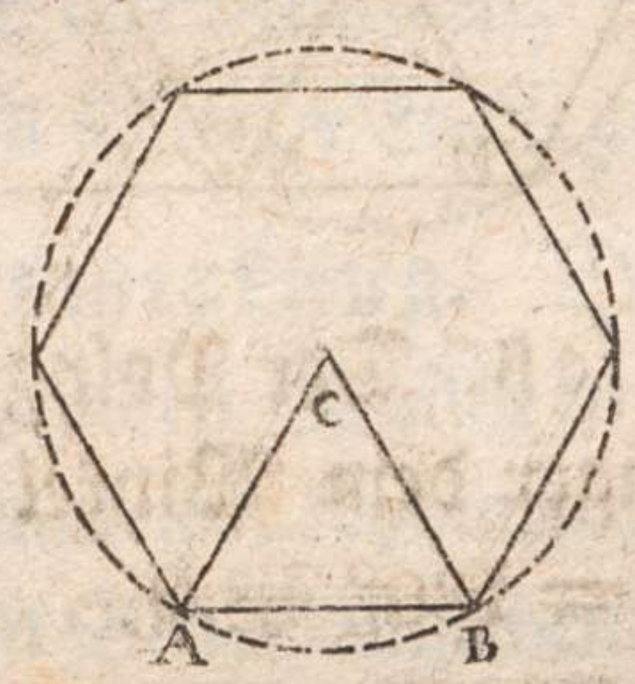
Beweis. Die drey Winkel M, N, O halten zusammen 180°; es ist aber nach dem vorigen Lehrsatze $M = N = R$: man kann also anstatt M den Winkel R setzen; folglich halten N, R und O zusammen ebenfalls 180°, und $N + R = 180° - O$.

137. Zusatz. Verlängert man eine Seite des regelmäßigen Vieleckes; so ist U der Nebenwinkel des Polygonwinkels $N + R$, und also auch $U = O$.

Hierauf gründet sich die Auflösung der Aufgabe: über eine gegebene Linie ein regelmäßiges Vieleck, von was immer für einer Anzahl von Seiten, zu beschreiben, wo man den Winkel am

Mittelpunkte als Nebenwinkel entweder durch den Transporteur, oder durch Abtheilung eines willkührlichen Kreises in die verlangten Theile, auftragen kann.

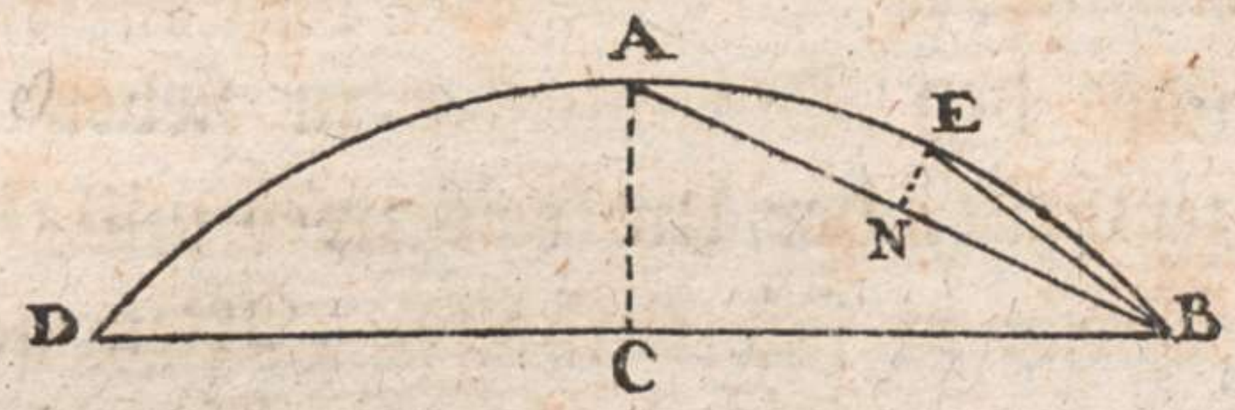
Man hat zwar für dergleichen Aufgaben noch verschiedene geometrische Handgriffe, die aber nicht allgemein, sondern bey jeder Anzahl von Seiten wieder anders sind, daher ihnen die obige Art vorzuziehen ist.



138. Lehrsatz. Die Seite des regelmäßigen Sechseckes ist dem Halbmesser gleich.

Beweis. Der Zentriwinkel C = 60°, weil 360 dividirt durch 6 gleich 60 ist; es bleiben also in dem Dreyecke A B C für die beyden Winkel an der Grundlinie noch 120° übrig; denn 180 — 60 gibt 120. Da nun das Dreyeck wegen der gleichen Halbmesser gleichschenklicht ist, so sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich, und jeder hat die Hälfte von 120°, das ist, 60° zu seinem Maaße. Es ist also das Dreyeck gleichseitig, weil gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber stehen, und A B = A C.

139. Zusatz. Der Halbmesser kann daher genau sechsmahl auf der Peripherie herum getragen werden.



140. Lehrsatz. Je kleiner eine Sehne im Kreise ist, desto näher kömmt sie auch an Länge ihrem Bogen.

Beweis. Zieht man A C rechtwinklicht auf D B; so ist die Sehne A B als die Hypothenuse von A C B offenbar länger, als die halbe Sehne C B; obschon A E B nur die Hälfte des Bogens der Sehne D B ist, und kömmt folglich dem Bogen A E B an Länge näher, als D B dem Bogen D A E B. Eben so verhält es sich auch bey der Sehne E B, welche ihrem Bogen an Länge noch näher kömmt.

141. Zusatz. Werden die Sehnen auf obige Art immer halbirt; so kann endlich eine Sehne gefunden werden, die an Länge ihrem Bogen beynahe gleich kömmt.

142. Zusatz. Legt man den Halbmesser als die Sehne des regelmäßigen Sechseckes zum Grunde, und setzt die Halbirungen fort; so ist es begreiflich, wie das Verhältniß des Halb-

messers oder des Doppelten, nähmlich des Durchmessers, zum Umkreise gefunden werden kann.

Archimedes von Syrakus fand zuerst, daß, wenn man den Durchmesser in sieben gleiche Theile zertheilt, der Umkreis zwey und zwanzig solcher Theile in sich enthalte. Weit genauer gab Ludolph von Köln dieses Verhältniß in 130 Dezimal-Zahlen an, wovon wir aber nur die 3 bis 4 ersten annehmen wollen, weil sie für die Ausübung bey Kunst-Gegenständen hinreichend sind. Wenn nach ihm der Durchmesser in 100 Theile getheilt wird, so hält die Peripherie 314 solcher Theile. Theilt man den Durchmesser in 1000 Theile; so hält der Umkreis 3141. Wir wollen ein für alle Mahl das Verhältniß von 100 zu 314 beybehalten. Bey kleinern Kreisen kann man sich auch des Verhältnisses von 7 zu 22 bedienen.

143. Zusatz. Ist also in einem Kreise der Durchmesser bekannt, so kann der Umkreis; und ist der Umkreis bekannt, der Durchmesser gefunden werden. Z. B. der Durchmesser halte 24′, wie groß wird der Umkreis seyn?

Der Ansatz ist nach der Kettenregel folgender:

X Periph.?	24′ Durchm.
100′ D.	314 P.

Antw. $75\frac{36}{100}$′.

Nach der Regel Detri:

D.	P.	D.?
100′	314′	24′

Antw. $75\frac{36}{100}'$.

Da der Schuh im Dezimalmaaße 10″ hält; so kann man zu 36 eine Nulle setzen, und nochmahls mit 100 dividiren, wo $3\frac{60}{100}$″ hervorkommen. Setzt man zu 60 noch eine Nulle; so hat man 6‴; im Ganzen also 75′, 3″, 6‴. Man sieht hieraus, daß nach diesem Verhältnisse der Umkreis leicht in Schuhen, Zollen und Linien, Dezimalmaaß erhalten werden kann.

Da nach der obigen Rechnung der Divisor 100 ist; so braucht man nur den gegebenen Durchmesser mit der Zahl 314 zu multipliziren, und die letzten zwey Zahlen wegen der Division mit 100 abzuschneiden, wodurch der obige Ansatz erspart wird.

144. Zusatz. Ist der Umkreis bekannt; so kann wieder der Durchmesser gefunden werden.

Der Umkreis halte z. B. 140′, wie groß wird der Durchmesser seyn?

X′ Durchm.? 140′ Periph.
314′ P. 100′ D.

14000 | 44′, 5″, 8‴.
314 |
1256 |

-1440
314
1256

-1840 zu Zollen.
314
1570

-2700 zu Linien.
314
2512

-188.

Nach der Regel Detri:

P.	D.	P?
314	100	140′

Antw. 44′, 5″, 8‴.

Aus dieser Rechnung erhellet, daß man zur gegebenen Peripherie nur zwey Nullen hinzusetzen, und das Produkt mit 314 dividiren darf, wodurch wieder der Ansatz erspart wird. Setzt man zu dem übrig gebliebenen Bruche immer eine Nulle; so kann durch fortgesetzte Division der Durchmesser in Dezimalzollen und Linien gefunden werden, wie das Beyspiel zeigt.

Von der wirklichen Ausmessung der Linien, Winkel und Flächen auf dem Felde oder Bauplatze.

145. **Anmerkung.** Zum Ausmessen der Linien bedient man sich gewöhnlich der **Messstangen** oder **Meßlatten** von 10 bis 20 Schuhen, die nach dem zwölftheiligen Maaße in Schuhe, Zolle und Viertelszolle eingetheilt sind. Bey grossen Flächen von Wiesen und Feldern gebraucht man auch die **Meßkette**, welche aus Gliedern von starkem Messing- oder Eisendrath, jedes zu einem Schuhe, zusammen gesetzt ist, und die gewöhnlich im Ganzen 100 Schuhe hält. Um die Winkel zu messen, hat man besondere von Messing verfertigte **Kreisbögen**, die in ihre 360 Grade, und diese durch eine eigene Vorrichtung, die man den Nonius nennt, wieder in Minuten eingetheilt sind. Dieses Instrument bleibt aber für den gemeinen Mann immer zu kostspielig, und ist auch zum gewöhnlichen Ausmessen entbehrlich. Außer demselben bedienet man sich zum Aufnehmen ganzer Gegenden noch des **Meßtisches**, und der **Dioptern-Lineale**, wozu ein guter **Kompaß**, und eine genaue **Wasserwage** zum Aufstellen des Tisches kömmt. Der Meßtisch mit seinen Zugehörungen ist daher nicht minder kostspielig, als die obigen Gradinstrumente;

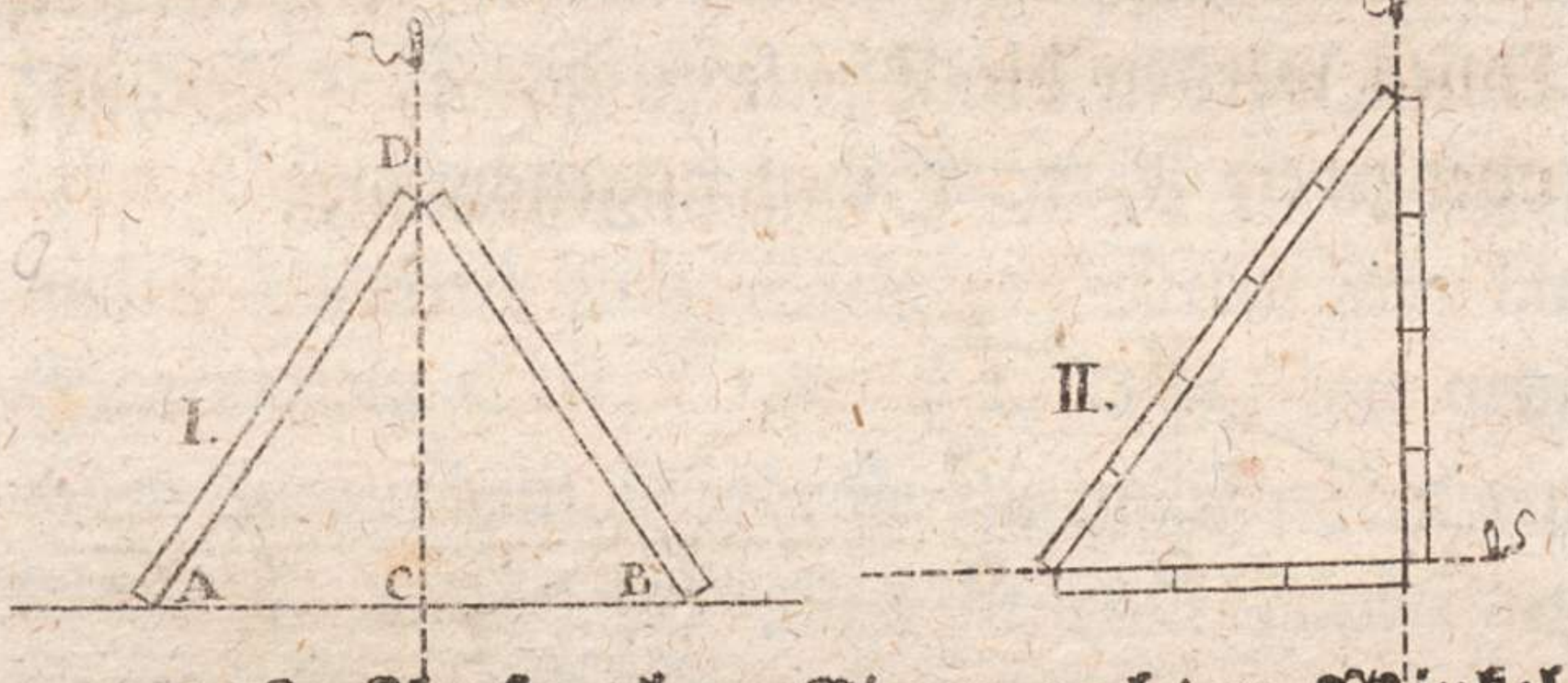
auch kann das Verfahren mit demselben nicht wohl durch Beschreibungen, sondern bloß durch Zusehen auf dem Felde erlernt werden. Wir halten uns daher bey Ausmessung der Linien, Winkel und Flächen bloß an die Meßlatte, weil sich dieselbe jedermann selbst verfertigen, und die nöthigen Ausmessungen sowohl für Künstler und Werkleute, als für den Landmann mit hinlänglicher Genauigkeit damit bewerkstelliget werden können. Hat jemand Gelegenheit, das Verfahren mit dem Meßtische zu sehen; so wird er darin keine Schwierigkeit finden, wenn er das, was in diesem Werke enthalten ist, wohl verstanden hat.

146. **Aufgabe. Eine gerade Linie zu messen.**

Man stecke ein Paar Stäbe in die Erde, und ziehe eine Schnur steif an, nehme dann die Meßlatte von 20 Schuhen, und lege sie so oft an, als es die Länge der Linie erfordert. Ist der Boden abhängig, so muß die Latte, so viel möglich, wagerecht gehalten werden.

147. **Eine gerade Linie mit Stangen abzustecken.**

Man steckt ein Paar Stangen in die Endespunkte der Linie, tritt dann einige Schritte hinter eine derselben, und läßt die übrigen so stellen, daß sich alle einander decken.

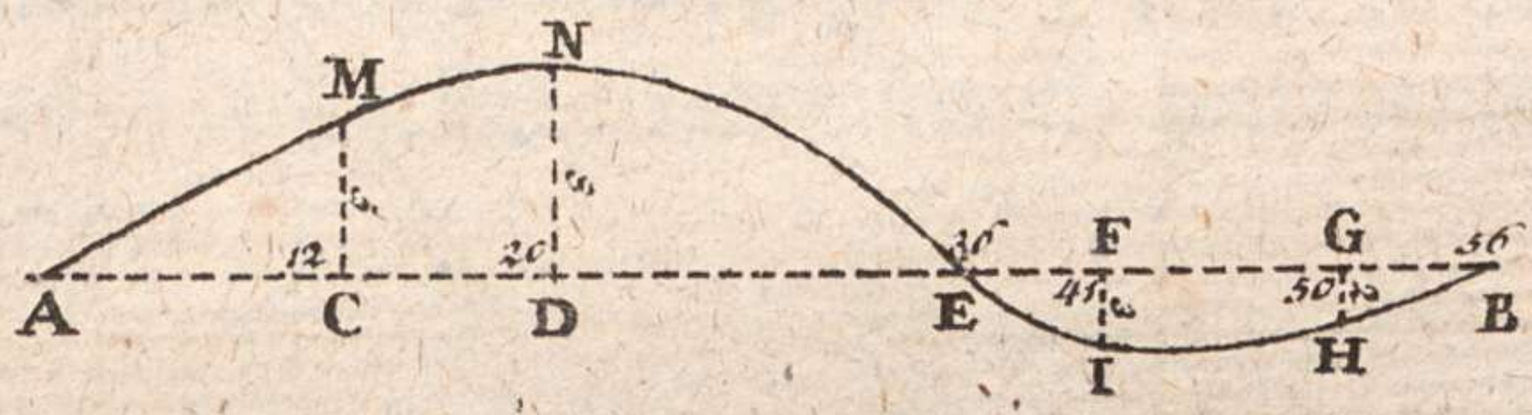


148. **Aufgabe. Einen rechten Winkel auf dem Felde oder Bauplatze auszustecken.**

Ist auf einer Linie A B Fig. I. der Punkt C gegeben, auf welcher eine Senkrechte errichtet werden soll; so nehme man von C gleiche Abschnitte A und B, lege zwey gleichlange Latten von A und B nach D zusammen; so kann von C nach D eine Schnur senkrecht gezogen, und dadurch der rechte Winkel errichtet werden. Oder: Fig. II.

149. Man trage eine gewisse Länge auf eine Latte dreymahl, auf die andere viermahl, und auf die dritte fünfmahl; lege die Endespunkte dieser Latten zusammen, und ziehe an die kürzern

zwey Schnüre an; so gibt dieß ebenfalls einen rechten Winkel. Bey Zusammenlegung grosser Balken bedient man sich dieser Art durchgehends, indem man auf einem derselben 12, auf dem andern 16, und auf einer Latte 20 Schuhe aufträgt, und die Balken so lange reibt, bis die Endespunkte mit der Latte genau zusammen treffen; daher dieses Verfahren bey den Werkleuten das Riebmaaß genannt wird. Bey kleinern Linien werden die Theile zu 3, 4, 5 Schuh, oder zu 6, 8, 10 Schuh angenommen.



150. **Aufgabe. Eine krumme Linie durch eine gerade A B zu messen, und nach dem verjüngten Maaßstabe zu Papier zu bringen.**

Man zeichne die vorzüglichsten Beugungen der krummen Linie aus freyer Hand beyläufig auf ein Papier, und ziehe eine gerade Linie A B durch selbe, so wie man sie ungefähr auf dem Felde an der krummen Linie hinmessen will Man messe dann wirklich von A bis C, und schreibe die Anzahl von Schuhen auf den Handriß; hier 12; errichte bey C eine Senkrechte C M, messe auch diese, und schreibe die Anzahl von Schu-

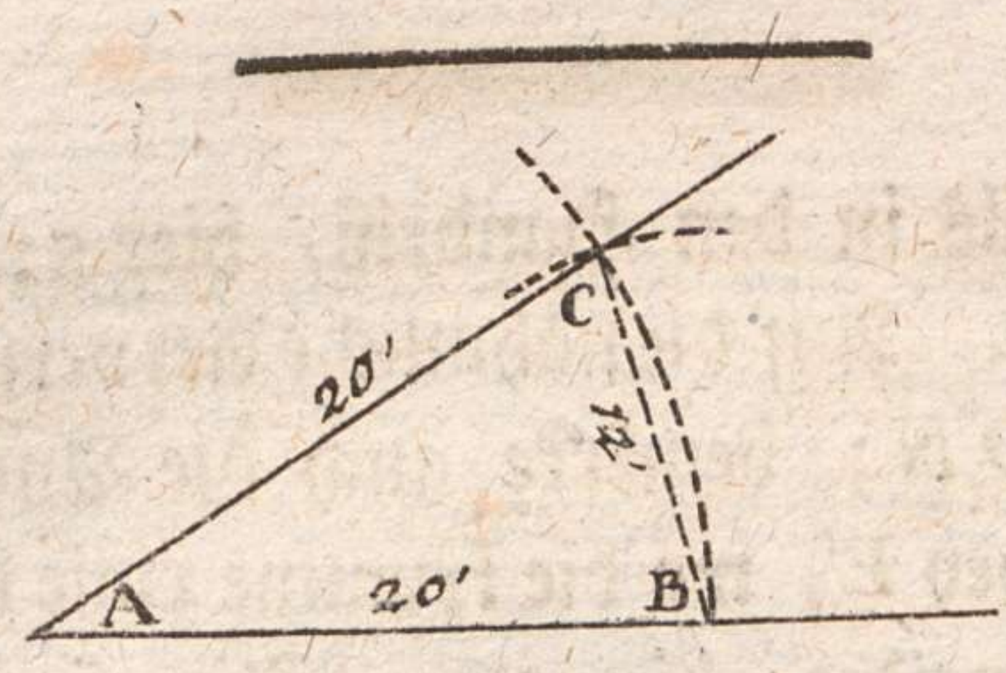
hen ebenfalls in den Handriß, hier 5; wie die Figur zeigt. Auf die nähmliche Art verfahre mit A D und D N; bemerke auch die Anzahl von Schuhen bey E, wo die krumme Linie die gerade durchschneidet, hier 36. Eben so behandle die übrigen senkrechten Linien, bis die krumme Linie in allen ihren Beugungen gemessen ist.

Will man sie nun zu Papier bringen, so mache man eine gerade Linie A B; trage nach dem verjüngten Maaßstabe die Längen 12′, 20′, 36 ꝛc. ihrer Ordnung nach von A gegen B; errichte auf diesen Punkten nach Seite 17, Nro. 40, die Senkrechten C M, D N, F I, G H, und gebe ihnen die auf dem Handrisse angemerkten Längen von 12′, 8′ ꝛc.; so können die Endespunkte der Senkrechten aus freyer Hand zusammen gezogen, und dadurch die krumme Linie mit hinlänglicher Genauigkeit erhalten werden.

151. **Anmerkung.** Die gerade Linie A B nennt man in der Geometrie eine **Abscissen-Linie**, und die darauf gesetzten Senkrechten, **rechtwinklichte Ordinaten.**

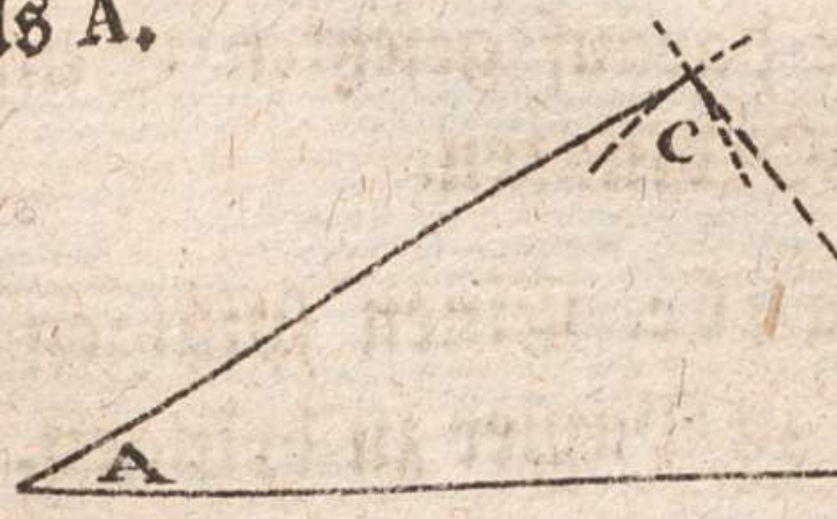
152 **Aufgabe.** **Einen spitzigen Winkel zu messen, und zu Papier zu bringen.**

Man messe auf den beyden Schenkeln A B und A C überall eine Anzahl von Schuhen z. B.



20 bis 30, messe dann die Linie B C, und bemerke die Anzahl von Schuhen, Zollen und Viertelszollen sehr genau; so erhält man beym Auftragen der Linien auch den Winkel A; weil durch drey bekannte Seiten in einem Dreyecke auch die drey Winkel bekannt werden.

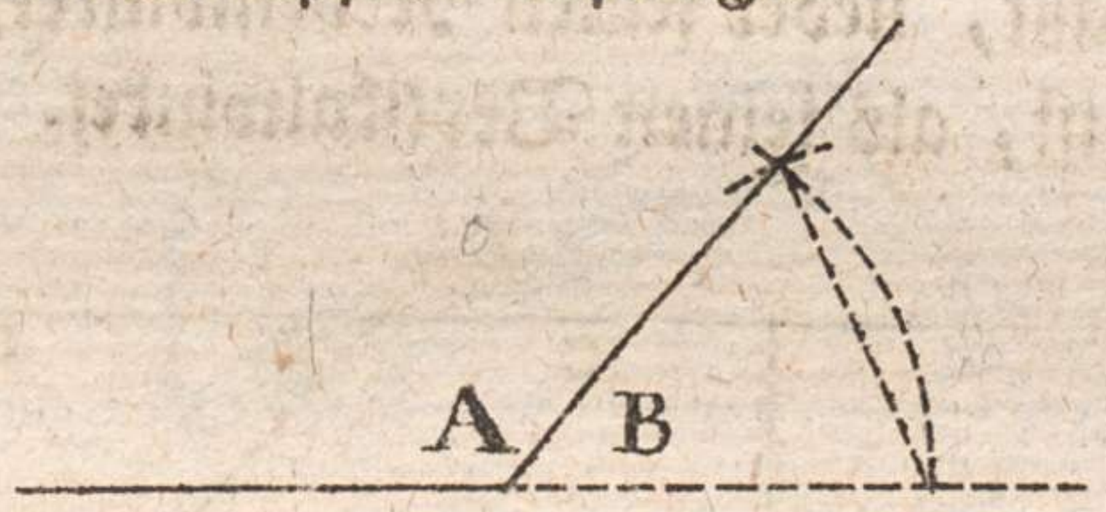
153. Will man diesen Winkel nach dem verjüngten Maaßstabe zu Papier bringen; so ziehe man eine gerade Linie A B, trage die Anzahl von Schuhen nach dem verjüngten Maaße von A nach B, und ziehe den Bogen B C; nehme dann die Länge der Linie B C ebenfalls auf dem verjüngten Maaßstabe in den Zirkel, setze die Spitze in B, und durchschneide den Bogen bey C; so gibt A C den andern Schenkel des Winkels A.



154. Können die beyden Schenkel nicht gleich lang gemessen werden, und ist z. B. der Schenkel A C kürzer als A B; so trage man Anfangs

A B auf; nehme die Länge von A C, und mache damit aus A einen Bogen bey C; nehme dann die Länge von B C, und durchschneide damit aus B den Bogen bey C; so gibt A C wieder den andern Schenkel des Winkels A.

155. **Anmerkung.** Da an der Genauigkeit der Winkel sehr viel gelegen ist; so kann man sich zum Auftragen derselben einen größern Maaßstab verfertigen, wo neben den Zollen auch noch wenigstens die Viertelszolle abgenommen werden können, und diesen nur zum Auftragen der Winkel gebrauchen, während man die Länge der Seiten einer Figur durch den dazu bestimmten kleinern Maaßstab aufträgt.



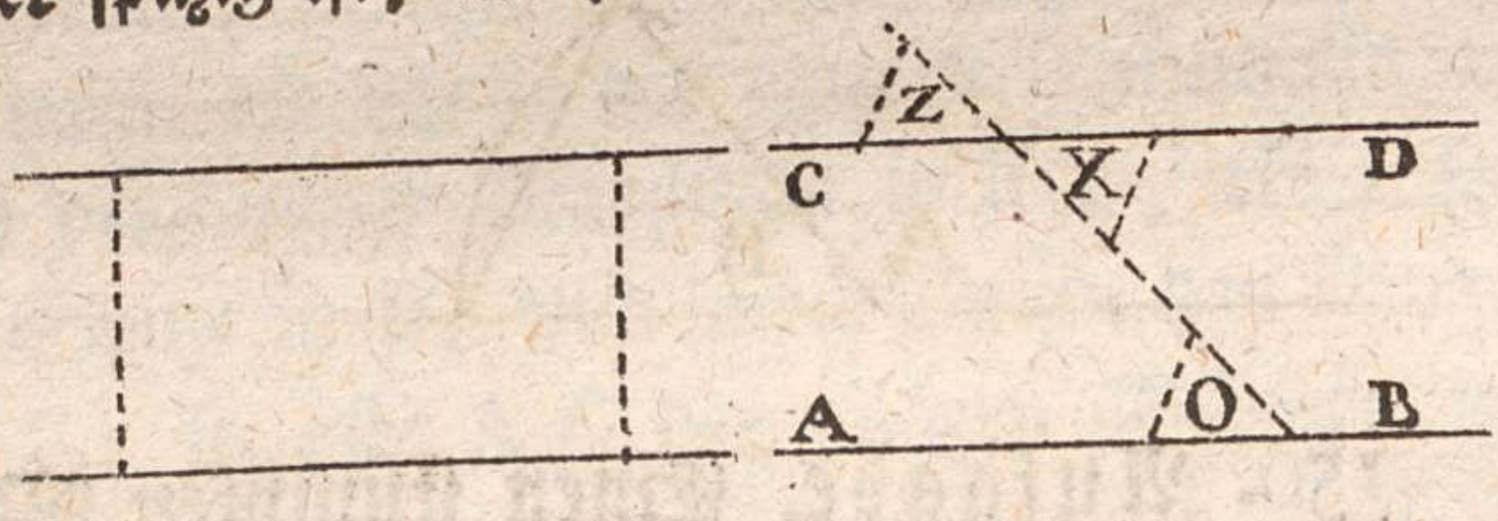
156. **Aufgabe.** Einen stumpfen Winkel A zu messen.

Man verlängere einen Schenkel, und messe seinen Nebenwinkel B; so wird beym Auftragen von B der Winkel A von sich selbst übrig bleiben. Bey sehr stumpfen Winkeln muß alle Mahl der Nebenwinkel gemessen werden, weil sich beym Erstern die Linien nicht deutlich genug durchschneiden würden.

157. **Aufgabe.** Einen spitzigen Winkel X, zu welchem man nicht kommen kann, zu messen.

Man verlängere die beyden Schenkel, und messe seinen Vertikalwinkel O; so wird beym Auftragen auch der Winkel X entstehen.

Ist der Winkel, zu dem man nicht kommen kann, ein stumpfer; so messe man, wenn es sich thun läßt, lieber seinen Nebenwinkel, welcher spitzig ist, als seinen Vertikalwinkel.



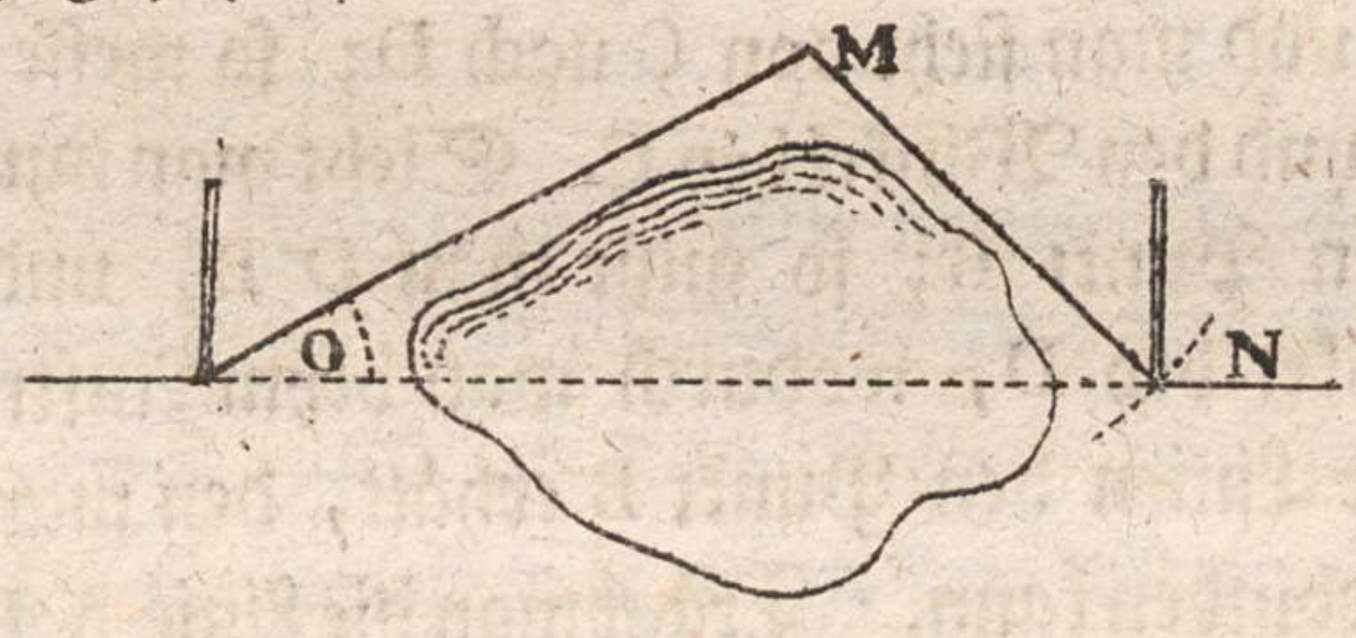
158. **Aufgabe.** Parallellinien auszustecken.

Man errichte auf obige Art ein Paar senkrechte Linien von gleicher Länge, und ziehe nach den Endespunkten derselben die Schnur an; wie die Figur I. zeigt. Oder Figur II. Man ziehe eine schiefe Linie Z O unter einem spitzigen Winkel von der gegebenen A B; messe den Winkel bey O,

mache den bey X oder Z gleich O; so kann nach der Richtung von C D eine Linie parallel mit A B gezogen werden.

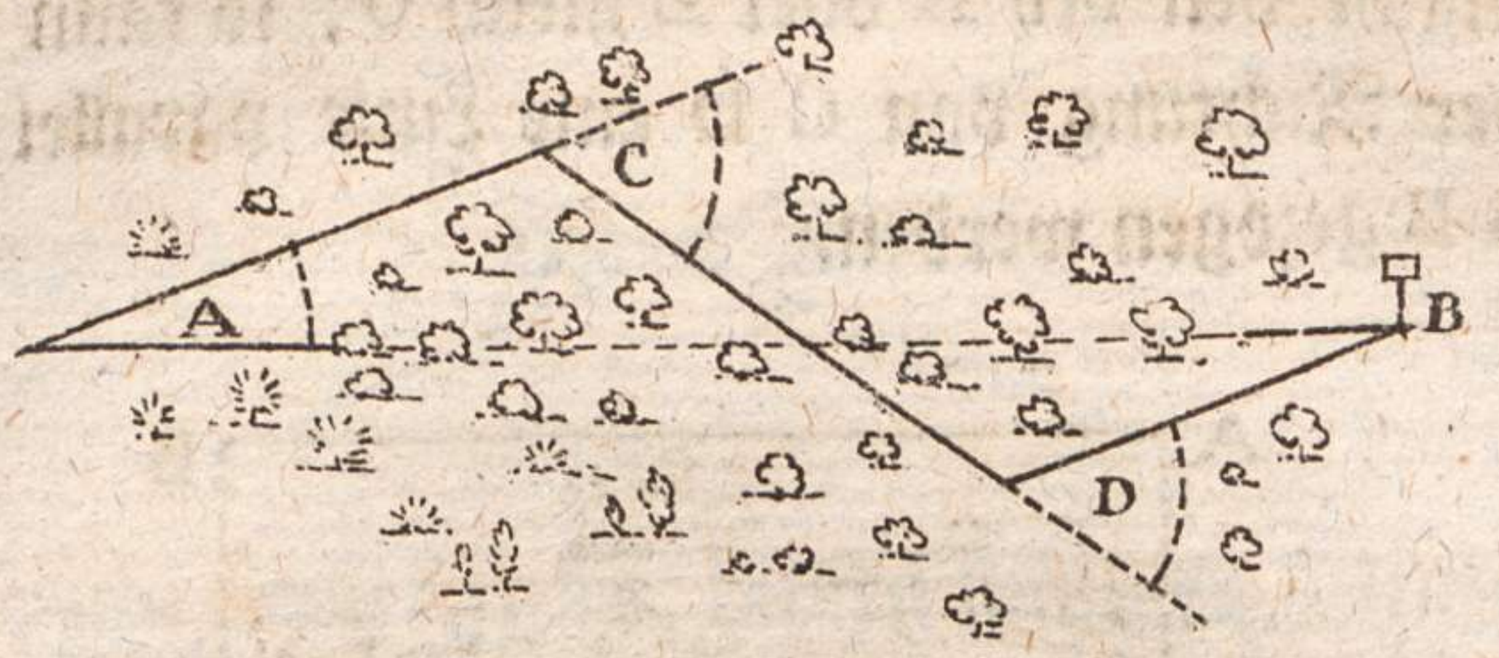
159. **Aufgabe. Eine gerade Linie über einen Platz zu messen, durch welchen man nicht sehen, oder kommen kann.**

Man setze ein Paar Senkrechte auf, und messe durch eine Parallellinie vorbey, wie die Figur zeigt; so ist A B = C D.



160. **Aufgabe. Eine gerade Linie über eine Grube zu messen.**

Man stecke ein Paar Stangen, wie die Figur zeigt, in der geraden Richtung nach dem Gegenstande, nach welchem man hinmißt, und messe den Winkel O, und die Linien O M und M N; so wird sich beym Auftragen die Linie O N abschneiden, und die Länge davon auf dem verjüngten Maaßstabe finden lassen.



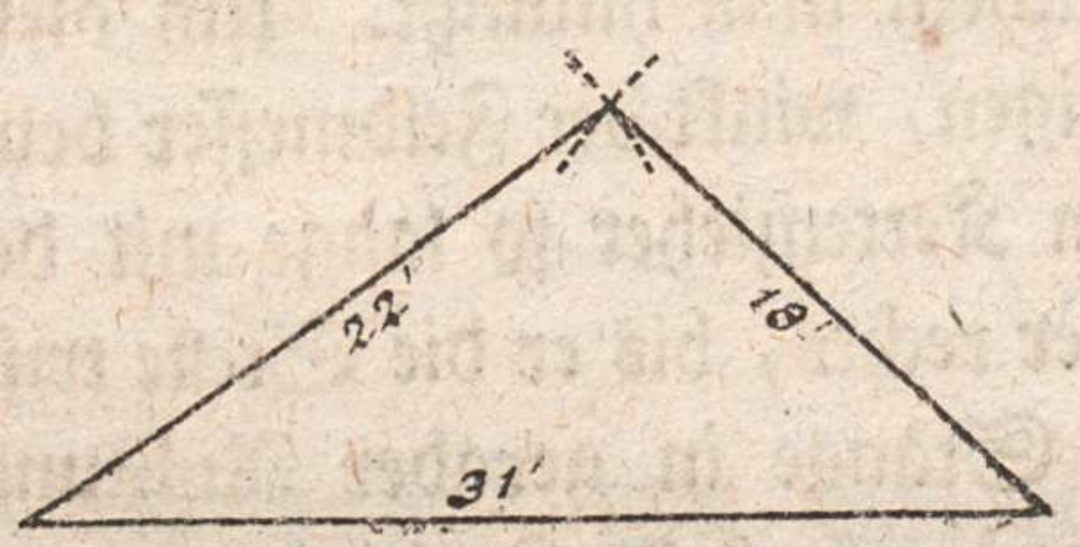
161. **Aufgabe. Eine gerade Linie von dem Punkte A bis zum Punkte B durch einen Wald zu messen, wo man von A den Punkt B nicht sehen kann.**

Man messe ungefähr nach der Richtung gegen B eine Linie A C. Kann man wegen Hindernissen von C nicht mehr in gerader Linie fortmessen, und man sieht von C nach D; so messe man C D, und den Winkel bey C. Sieht man nun von D den Punkt B; so mißt man D B, und den Winkel bey D, wodurch man beym Auftragen dieser Linien den Punkt B erhält, den man mit A verbinden kann. Trägt man die Linie A B auf den verjüngten Maaßstab; so findet man dort ihre Länge.

Werden in der Zeichnung auf den Punkten A, C und B feine Stifte senkrecht errichtet, die Zeichnung auf ein Reißbrett gespannt, dieses über den Punkt A auf dem Felde wagerecht, und zwar so gebracht, daß der Punkt A in der Zeichnung senkrecht über den Punkt A auf dem Felde steht, bey C aber eine Stange gesetzt, und die Stifte

A C nach derselben gerichtet; so zeigt A B gerade auf den Punkt B; wo man eine gerade Linie, wenn es nöthig ist, nach dieser Richtung durch das Gebüsch durchhauen kann.

162. **Anmerkung.** Bey langen Linien wird zu dieser Aufgabe der Meßtisch, oder ein gutes Winkel-Instrument angewandt, so wie überhaupts die Entfernungen von Punkten, zu denen man nicht kommen kann, am sichersten durch diese Instrumente gemessen werden.



163. **Aufgabe. Ein dreyeckichtes Feld auszumessen, und zu Papier zu bringen.**

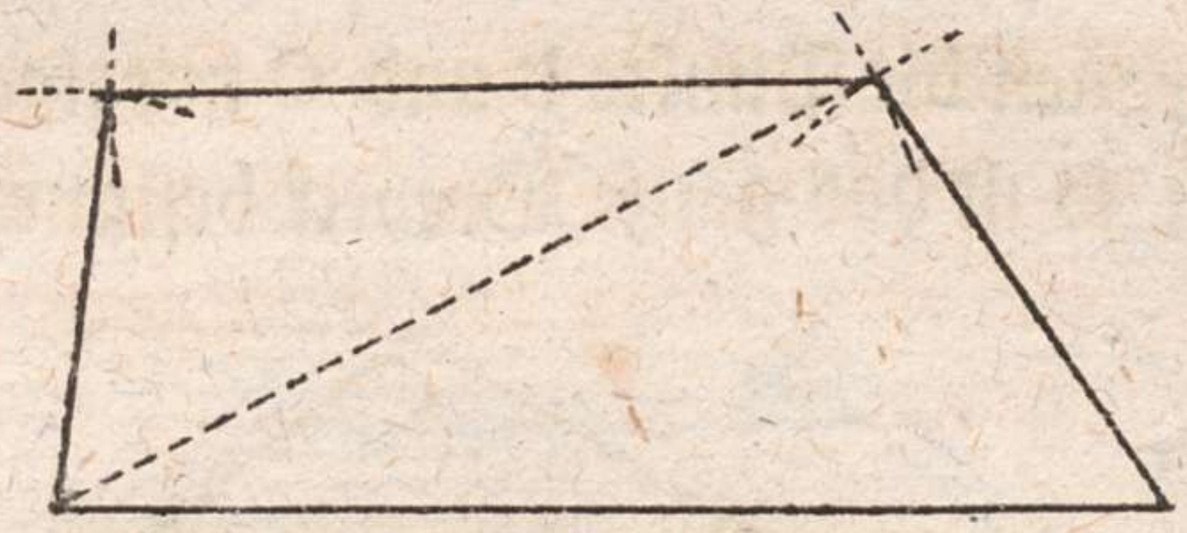
Man messe die drey Linien, und schreibe die Maaße derselben in einen beyläufigen Handriß; nehme beym Aufzeichnen eine Linie zur Grundlinie, trage ihr Maaß auf dieselbe, und setze die übrigen mit Durchschneidungen darauf, wie die Figur zeigt.

164. **Anmerkung.** Da man bey jeder Figur einen ungefähren Handriß nöthig hat, um die Längen der Linien dazu zu schreiben; so muß man zuvor die Figur wohl umgehen, um ihre Seiten und Winkel genau kennen zu lernen. Auf

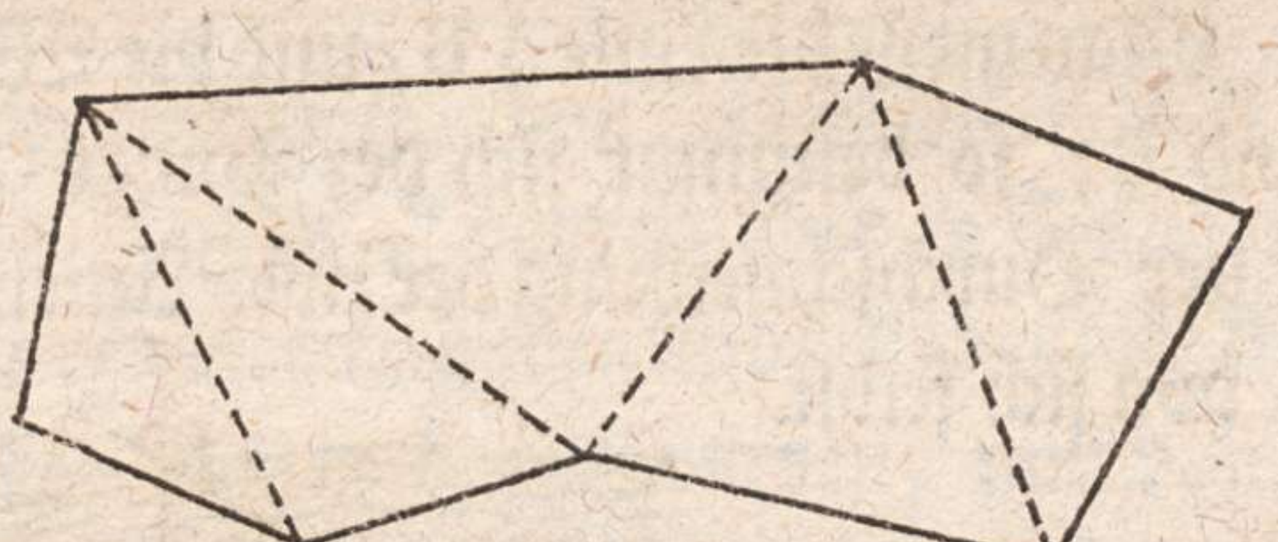
den Ecken läßt man Stangen stecken, damit man, wenn die Schnüre zu kurz sind, eine Linie abstecken, und in gerader Richtung nach denselben messen könne.

165. Hat man eine Meßkette; so werden die beyden Ringe, die sich hinten und vorne befinden, an zwey unten spitzige Stangen gelegt, und die vordere durch die hintere jedes Mahl in gerader Richtung nach dem Gegenstande gestellt, nach welchem man hinmißt. Um dieses zu bewerkstelligen, winkt der Feldmesser dem vorausgehenden Kettenzieher so lange mit der Hand, links oder rechts, bis er die Stelle trift, wo die vordere Stange in gerader Richtung mit der hintern das aufgestellte Zeichen deckt, auf welches man zumißt. Ist die Kette in gerader Richtung; so wird in den Platz der vordern Stange ein kleiner Stab gesteckt, und die Kette so lange vorwärts gezogen, bis die hintere Stange in die Stelle der vordern zu stehen kömmt, wo der, von dem vordern Kettenzieher eingesteckte kleine Stab von den folgenden aufgehoben wird. Nach ganz gemessener Linie zeigt die Anzahl der Stäbe, die Anzahl der Ketten, und folglich die Länge der Linie an.

166. Aufgabe. Einen viereckichten Platz auszumessen.

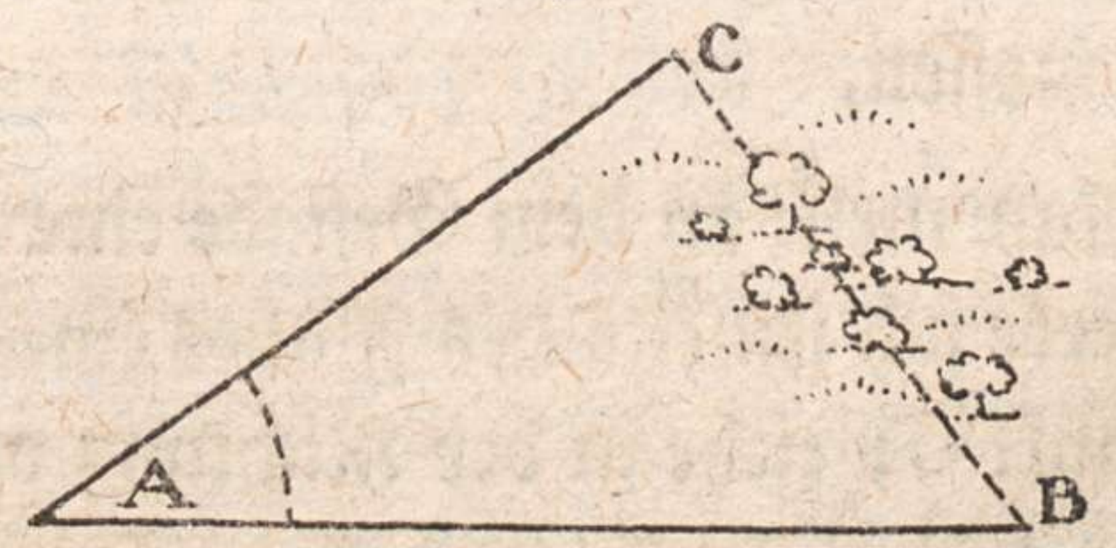


Man messe die vier Seiten, und die Diagonallinie; so kann das Ganze als zwey Dreyecke aufgetragen werden.



167. Aufgabe. Ein unregelmäßiges Vieleck auszumessen.

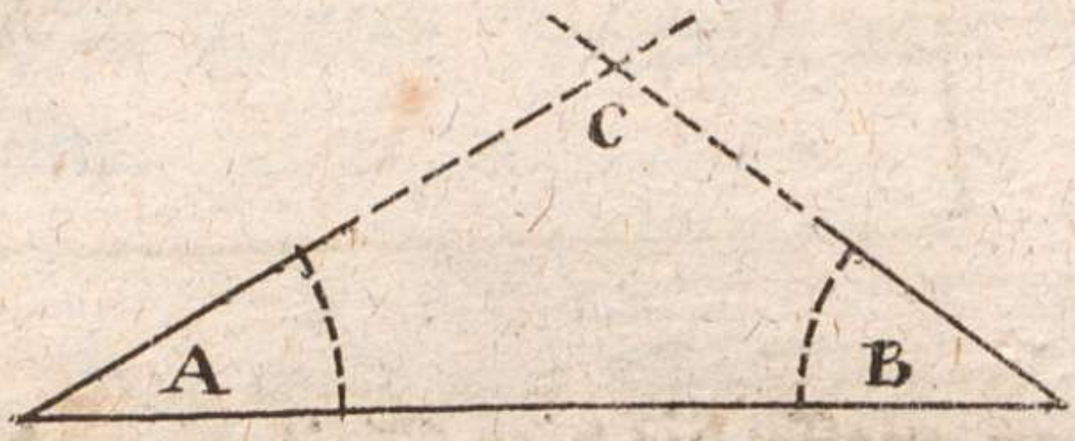
Man zerfälle die Figur in lauter Dreyecke; messe alle Seiten, und trage sie als lauter Dreyecke auf.



168. Aufgabe. Ein Dreyeck auszumessen, wo man von B nach C nicht kommen kann.

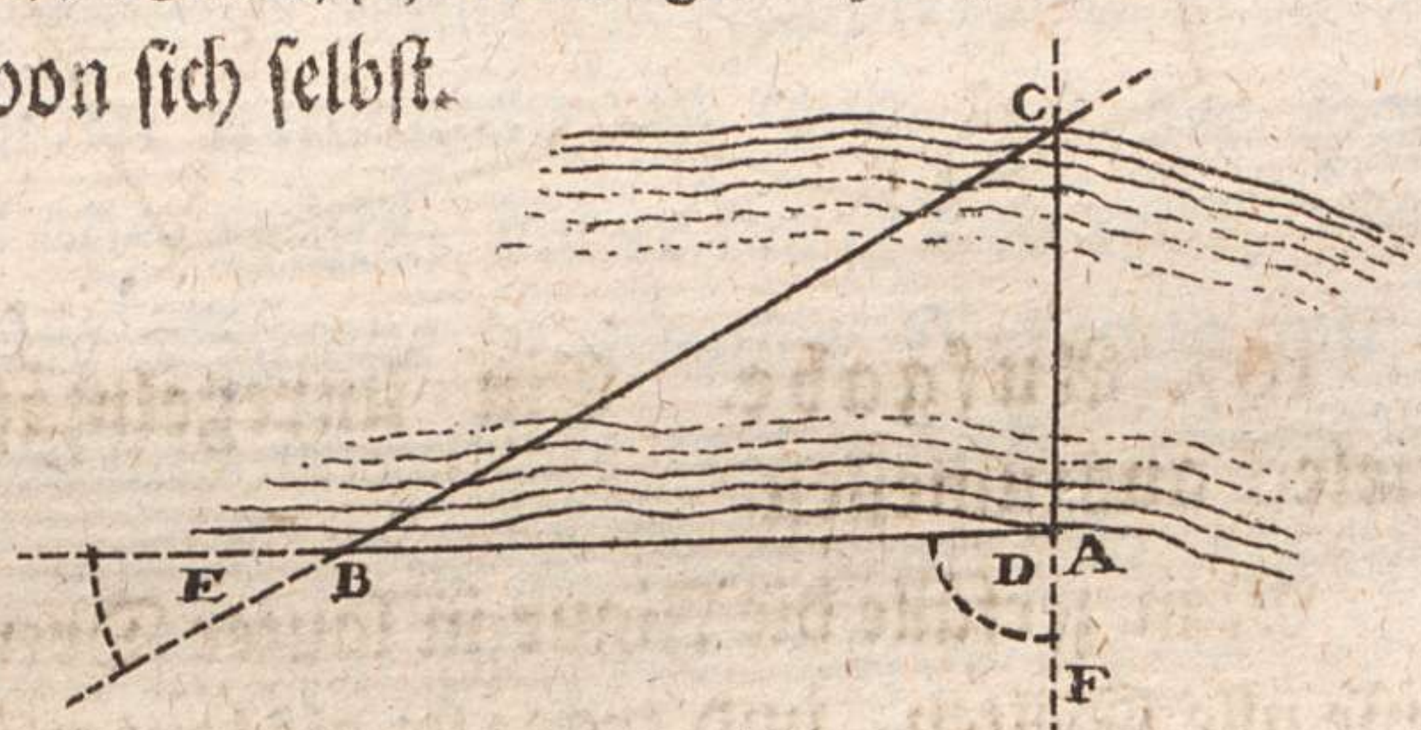
Man messe den Winkel bey A, dann die Seiten A B, und A C, und verbinde beym

Auftragen die Punkte B und C mit einer geraden Linie; so ist das ganze Dreyeck bestimmt.



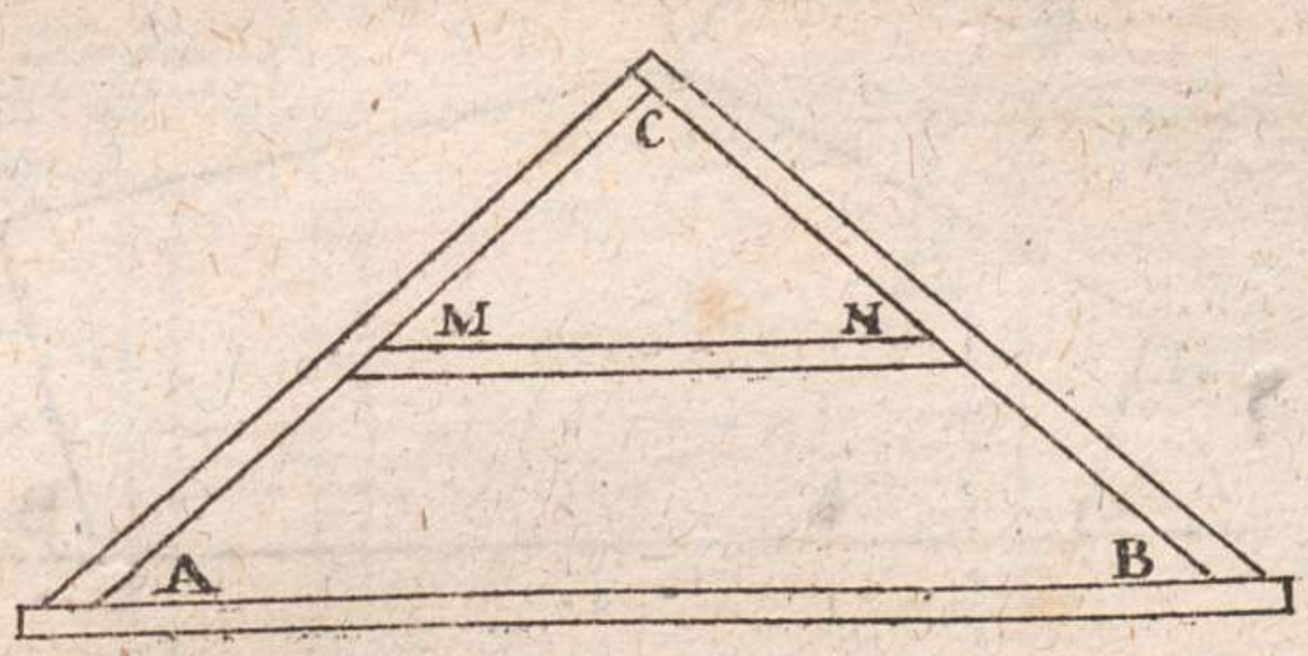
169. **Aufgabe. Ein Dreyeck auszumessen, wo der Punkt C unzugänglich ist.**

Man messe die Linie A B, und die Winkel bey A und B; so bestimmt sich der Punkt C vermittelst der Durchschneidung der zwey Linien A C und B C von sich selbst.



170. **Aufgabe. Die Breite eines Flusses zu messen.**

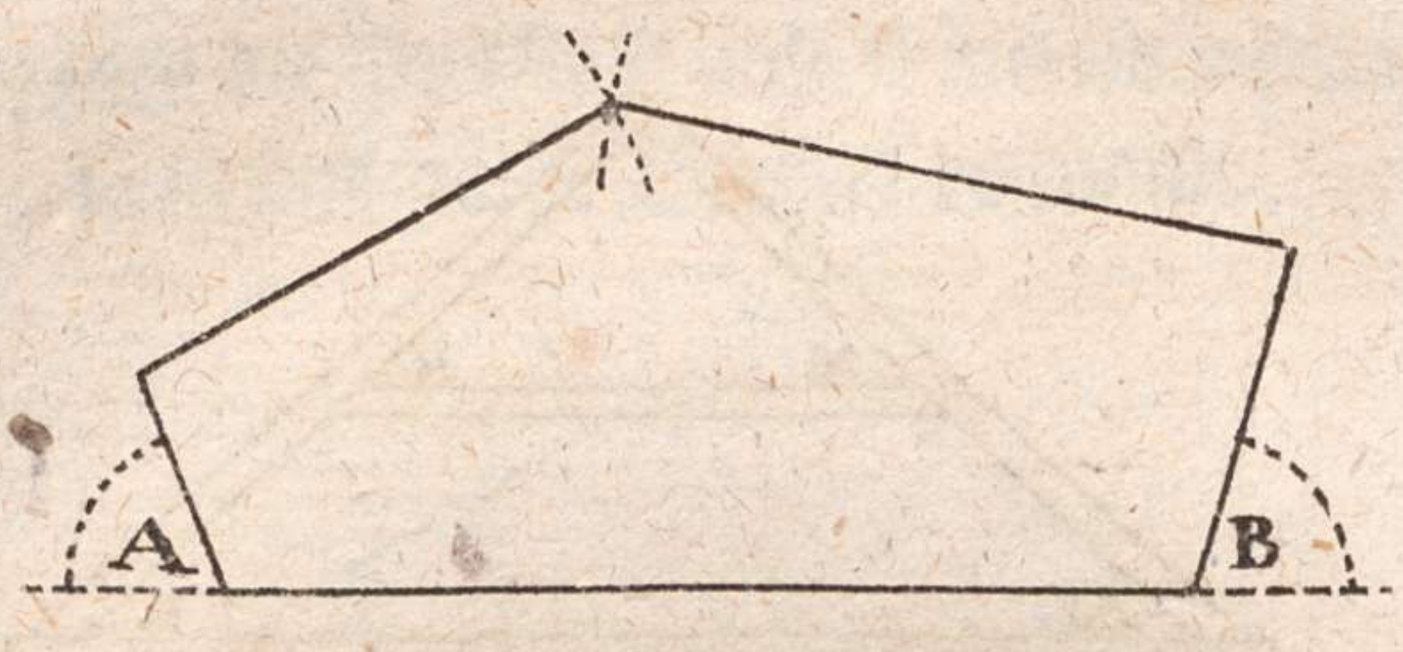
Man messe an dem Gestade eine Linie A B, und merke sich jenseits des Flußes einen bestimmten Punkt C; ziehe in der Richtung von A C eine Linie A F rückwärts, und messe den Winkel D; und bey B den Scheitelwinkel E, indem man die Linie nach der Richtung von B C rückwärts verlängert; so kann die Länge A C beym Aufzeichnen der Figur auf dem verjüngten Maasstabe gefunden werden.



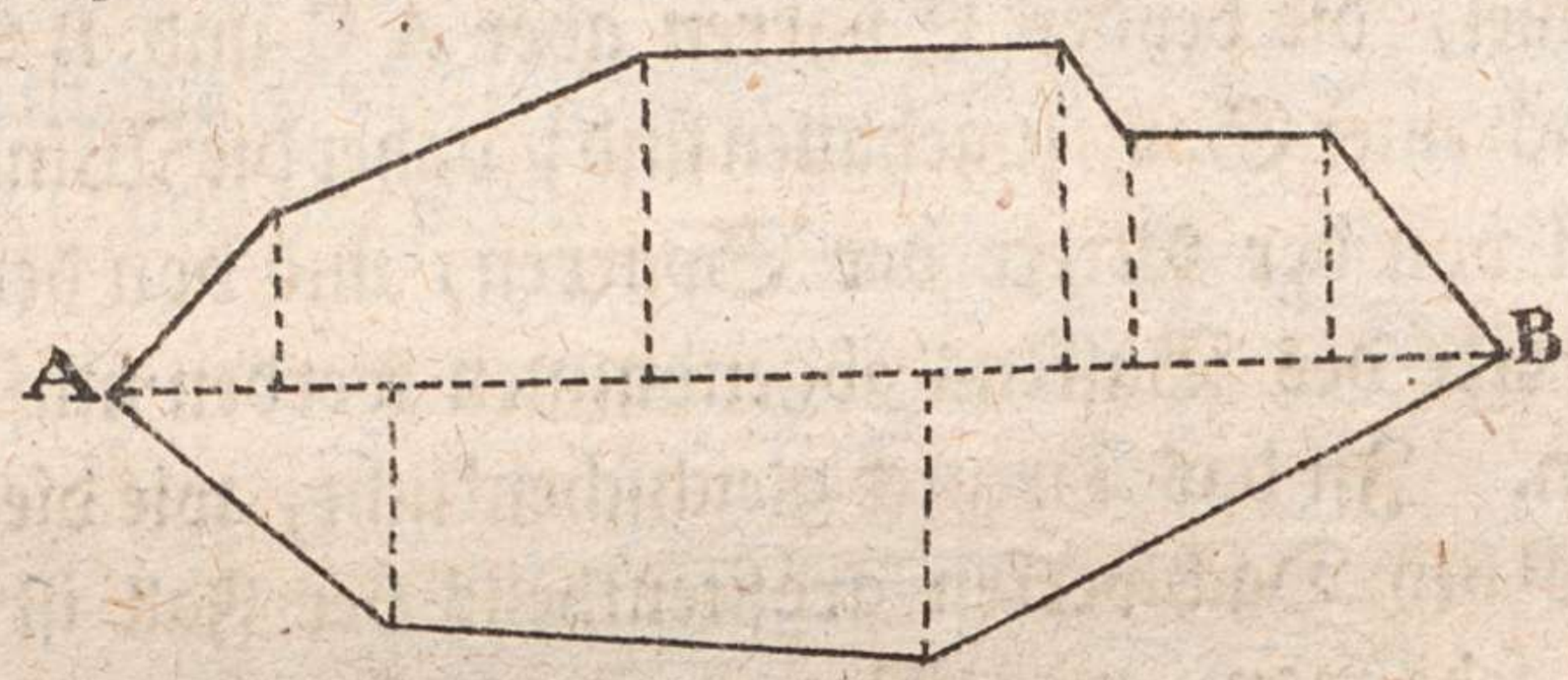
171. Aufgabe. Die Winkellehren von einem Dachgesperre abzunehmen.

Man betrachte, daß der Balken A B parallel, die beyden Sparren aber A C und B C nach einer Spitze zugehauen sind; daher die Winkel von der Mitte der Sparren, und von der Seite des Balkens abgenommen werden müssen. Ist das Dreyeck gleichschenklicht, wie dieses bey Dachwerken größtentheils der Fall ist; so sehe man, was Nro. 103, 108, 109 von gleichschenklichten Dreyecken ist gesagt worden. Ist das Dreyeck ungleichseitig; so betrachte man die Lehrsätze Nro. 96, 98 und 100. Sind in dem Dache Kehlbalken M N vorhanden; so liegen sie mit dem Balken A B parallel; und die Winkel M und N sind gleich A und B. Durch diese Beobachtungen wird man die vorkommenden Hindernisse leicht heben können.

172. Aufgabe. Ein Vieleck auszumessen, in welches man nicht hinein gehen kann.

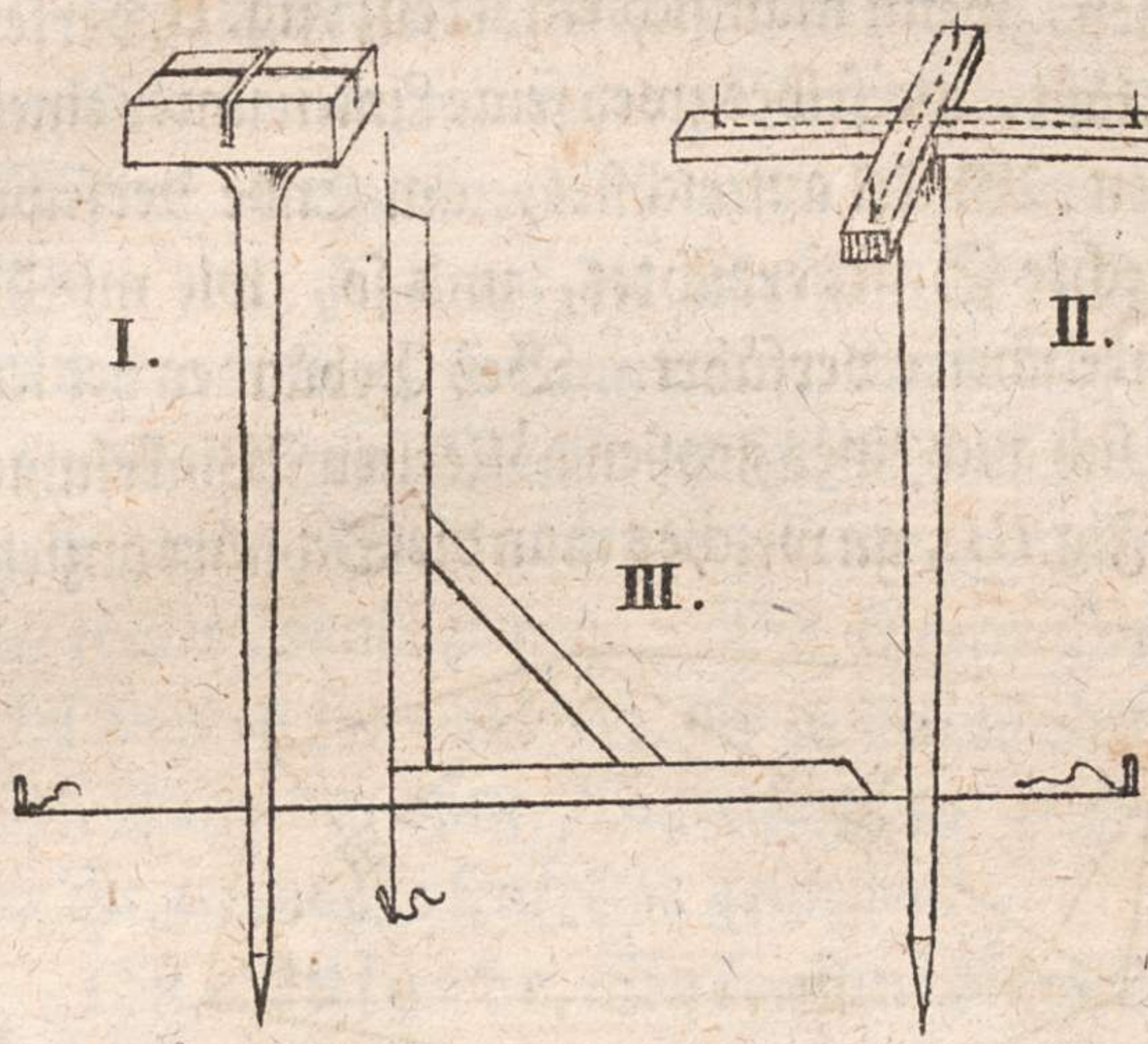


Man messe so viele Nebenwinkel, als man nöthig hat, hier zwey, A und B, und alle Seiten von außen; so läßt sich die ganze Figur richtig zu Papier bringen.



173. **Aufgabe. Ein länglichtes Vieleck durch eine einzige gerade Linie auszumessen.**

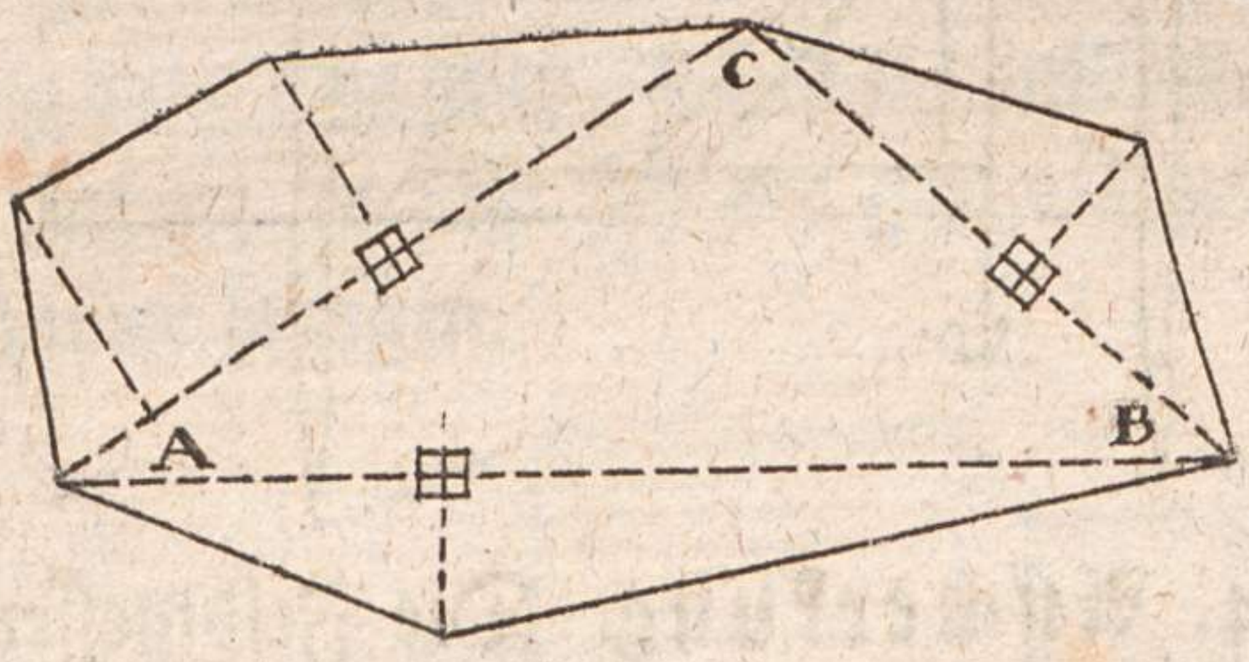
Man messe die Linie A B, fälle aus jedem Winkel Senkrechte auf dieselbe; und schreibe die Längen aller Linien genau auf; so können die Endpunkte der Senkrechten zusammen gezogen, und die ganze Figur richtig aufgezeichnet werden. Das Verfahren ist hier das nähmliche, wie bey der krummen Linie; nur daß die äußern Linien in gerader Richtung nach dem Lineale zusammen gezogen werden, die sich durch die Endespunkte der Senkrechten von sich selbst bestimmen.



174. **Anmerkung.** Die Feldmesser bedienen sich zum Aufrichten oder Fällen der rechten Winkel der sogenannten Winkelscheibe Fig. I., welches ein rundes oder viereckichtes Stück Holz auf einem mit einer Spitze versehenen Fuße ist, in das mit einer Säge ein Kreuz rechtwinklicht eingeschnitten wird, wie die Figur zeigt. Mit diesem Instrumente geht man auf der Linie A B in der vorhergehenden Aufgabe so lange auf und ab, bis man dasselbe senkrecht so einstecken kann, daß man durch einen Schnitt die Punkte A und B, und durch den andern das Zeichen, welches man in dem Winkel errichtet hat, sehen kann, wo aus dem Punkte der Winkelscheibe bis an den Winkel die Senkrechte gemessen wird.

175. Noch genauer kann man rechte Winkel ausstecken, oder aus einem bestimmten Punk-

te fällen, wenn man sich ein Kreuz Fig. II. verfertigen läßt, auf selbes zwey feine Linien unter einem rechten Winkel aufzeichnet, am Ende derselben senkrechte Stifte errichtet, und so, wie mit der Winkelscheibe verfährt. Bey Gebäuden bedient man sich auch eines großen hölzernen Winkelmaaßes, Fig. III., an welches man die Schnüre anzieht.



176. **Aufgabe. Ein großes Vieleck durch ein Dreyeck zu messen.**

Man messe ein Dreyeck, nach Gutbefinden in die Figur, hier A B C, und von den Seiten desselben in die Winkel, senkrechte Linien; so bestimmen sich, wenn das Dreyeck, und die Senkrechten aufgetragen werden, die Seiten des Vieleckes durch die Endespunkte der Senkrechten. Ist das Vieleck sehr weitschichtig; so können auch mehrere Dreyecke an einander gemessen, und darauf die Senkrechten gefällt werden.

177. Aufgabe. Einen Teich auszumessen.

Man schließe ihn in ein Dreyeck oder Viereck; hier in ein Dreyeck, messe die Seiten desselben, und setze auf die stärksten Beugungen senkrechte Linien; so kann man, wenn diese nach dem verjüngten Maaße aufgezeichnet werden, die krumme Linie mit hinlänglicher Genauigkeit aus freyer Hand ziehen. Die kurzen Perpendickel werden sowohl hier, als in den vorhergehenden Aufgaben ohne Winkelscheibe, bloß nach dem Augenmaaße senkrecht gemessen.

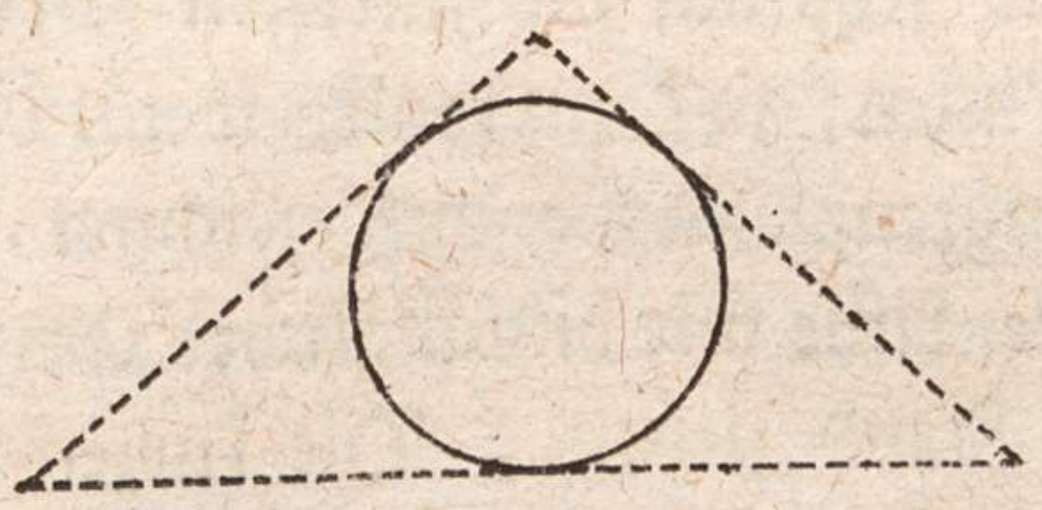
178. Aufgabe. Ein regelmäßiges Vieleck auszumessen, und zu Papier zu bringen.

Man messe nur Eine Seite, und bemerke die Anzahl der Seiten des Vieleckes; so kann dasselbe nach der Aufgabe, Seite 24, Nro. 56, aufgezeichnet werden.

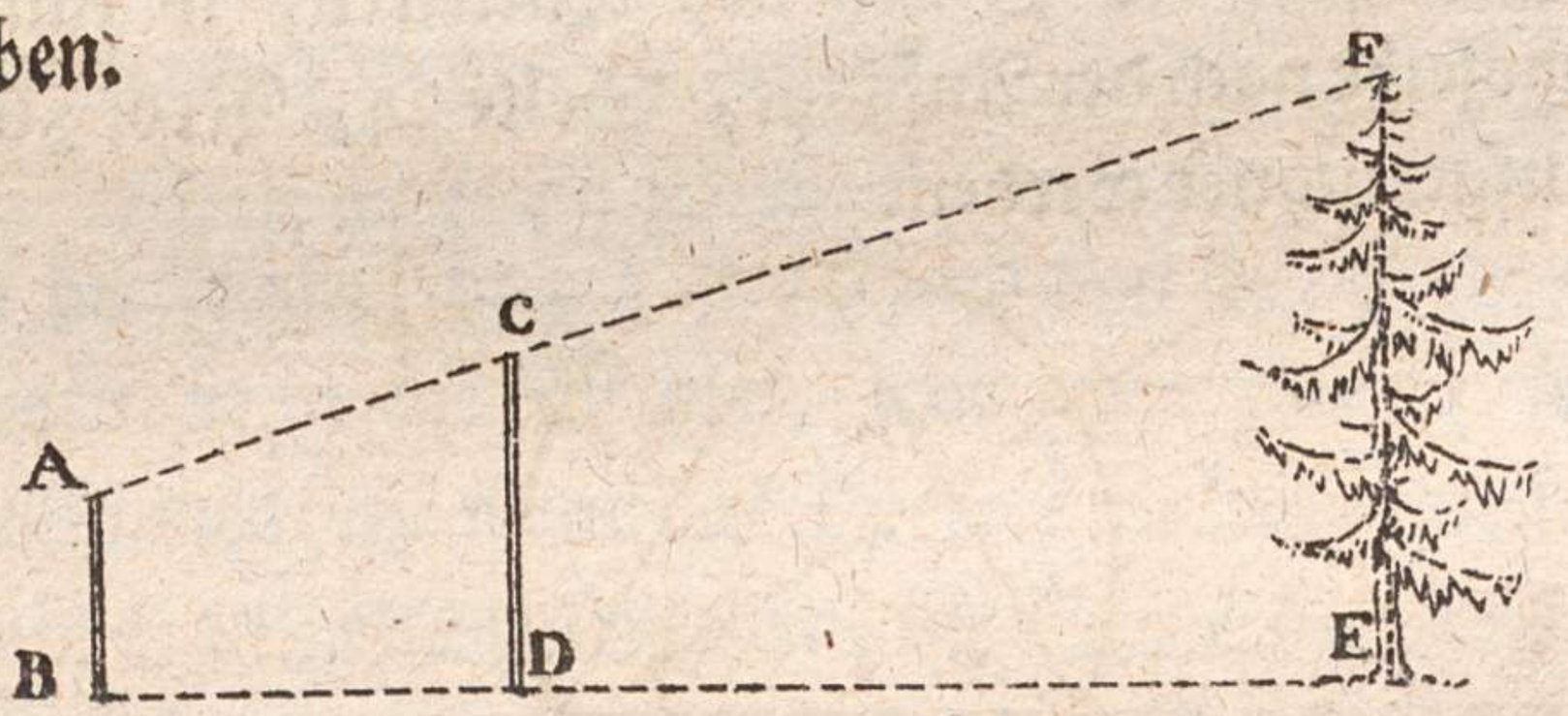
179. Aufgabe. Eine Kreisfläche, wo der Mittelpunkt nicht bekannt ist, auszumessen.

Man messe durch drey Punkte des Kreises ein Dreyeck, bringe dieses nach dem verjüngten Maaßstabe zu Papier, und suche durch Auffe-

tung zweyer Senkrechten den Mittelpunkt; so kann durch die Spitzen des Dreyeckes der Kreis nach seiner Größe beschrieben werden.



180. **Kann man in den Kreis nicht hineingehen;** so messe man ein Dreyeck um selben herum, doch so, daß die Seiten die Kreislinie berühren; so kann man wieder, wenn das Dreyeck aufgetragen ist, durch Zertheilung zweyer Winkel den Kreis in das Dreyeck hinein beschreiben.

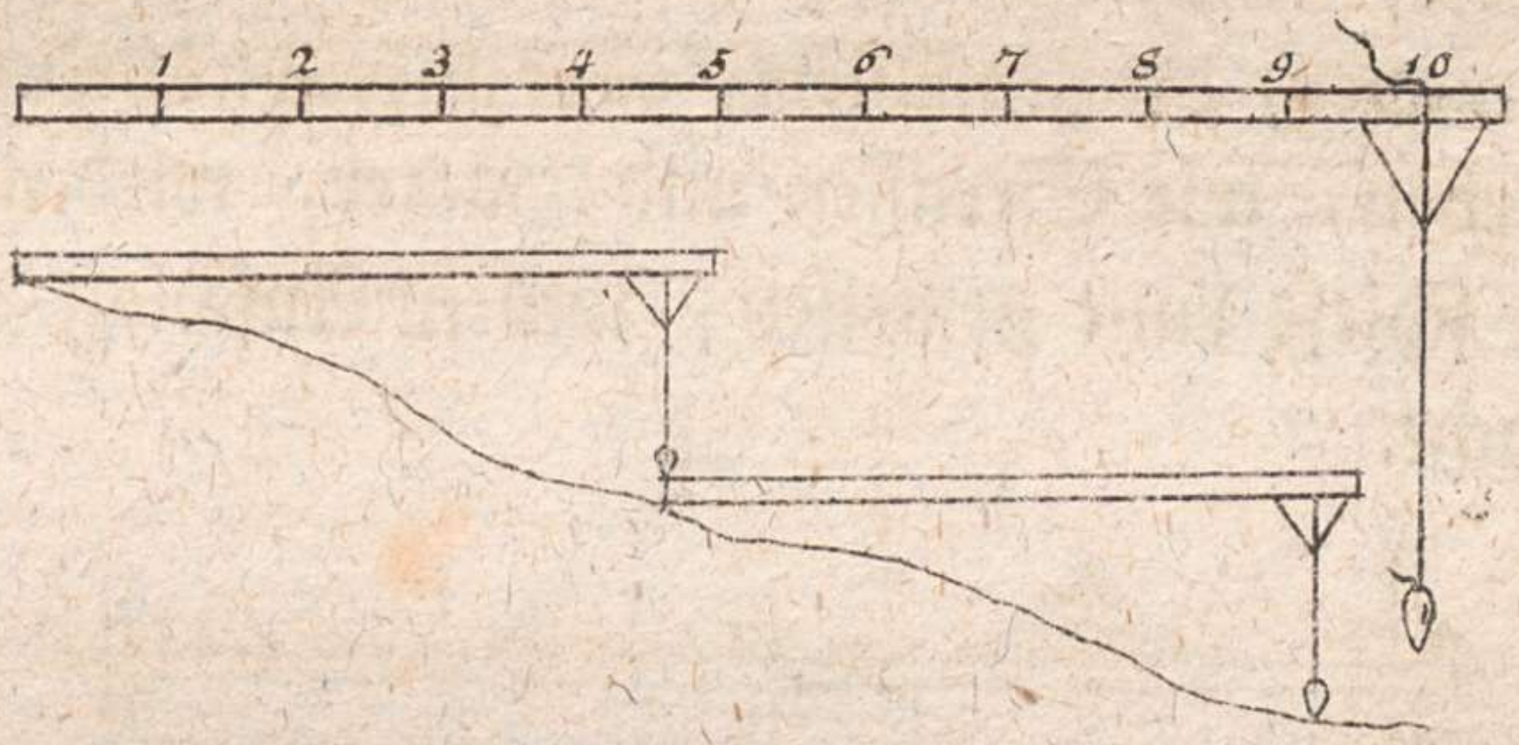


181. **Aufgabe. Die Höhe einer Mauer oder eines Baumes zu messen.**

Man stecke in einiger Entfernung von dem Gegenstande eine Stange A B, ungefähr 5 Fuß hoch, lasse eine andere Stange C D in gerader Richtung mit dem Baume so stecken, daß die

drey

drey Punkte A C F, wenn man über A hinsieht, sich einander decken; messe die Entfernung der beyden Stangen B D, ihre Höhe A B und C D, und die Linie B E; so wird sich, wenn die Figur aufgezeichnet ist, und bey E eine senkrechte Linie errichtet wird, die Höhe E F durch A C F abschneiden, und auf dem verjüngten Maaßstabe finden lassen.



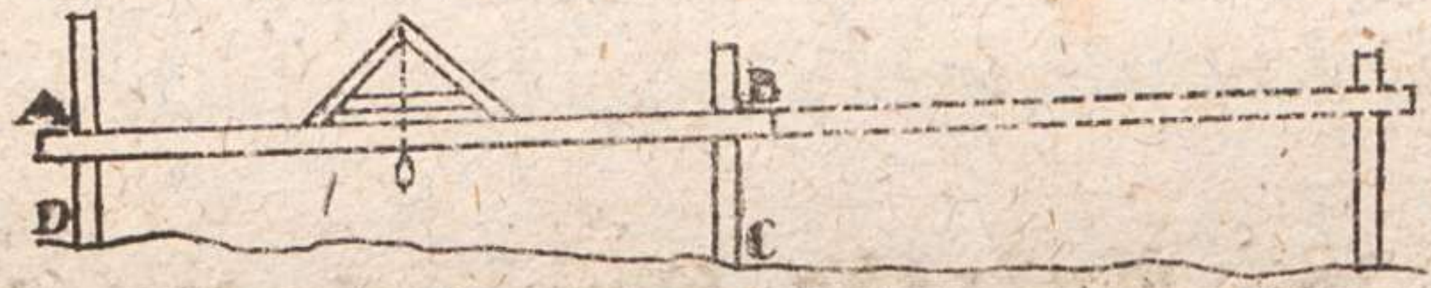
182. Aufgabe. Eine gerade Linie über einen Berg zu messen.

Man nehme eine Meßlatte von 10 Schuhen, befestige vorne ein gleichschenklichtes Dreyeck daran, dessen Spitze senkrecht auf dem Punkte 10 steht. Von diesem Punkte lasse durch eine kleine Oeffnung eine Schnur mit einem Senkbley herunter, welches man auf und ab ziehen kann. Beym Messen lege die Latte so an, daß das Senkbley mit der Schnur an der Spitze des gleichschenklichten Dreyeckes steht, wodurch die Latte immer wagerecht bleibt, und stecke dort, wo das Senkbley den Boden berührt, einen klei-

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

nen Stab, an welchen man die Latte wieder anlegt, und so fortfährt, bis die Linie gemessen ist.

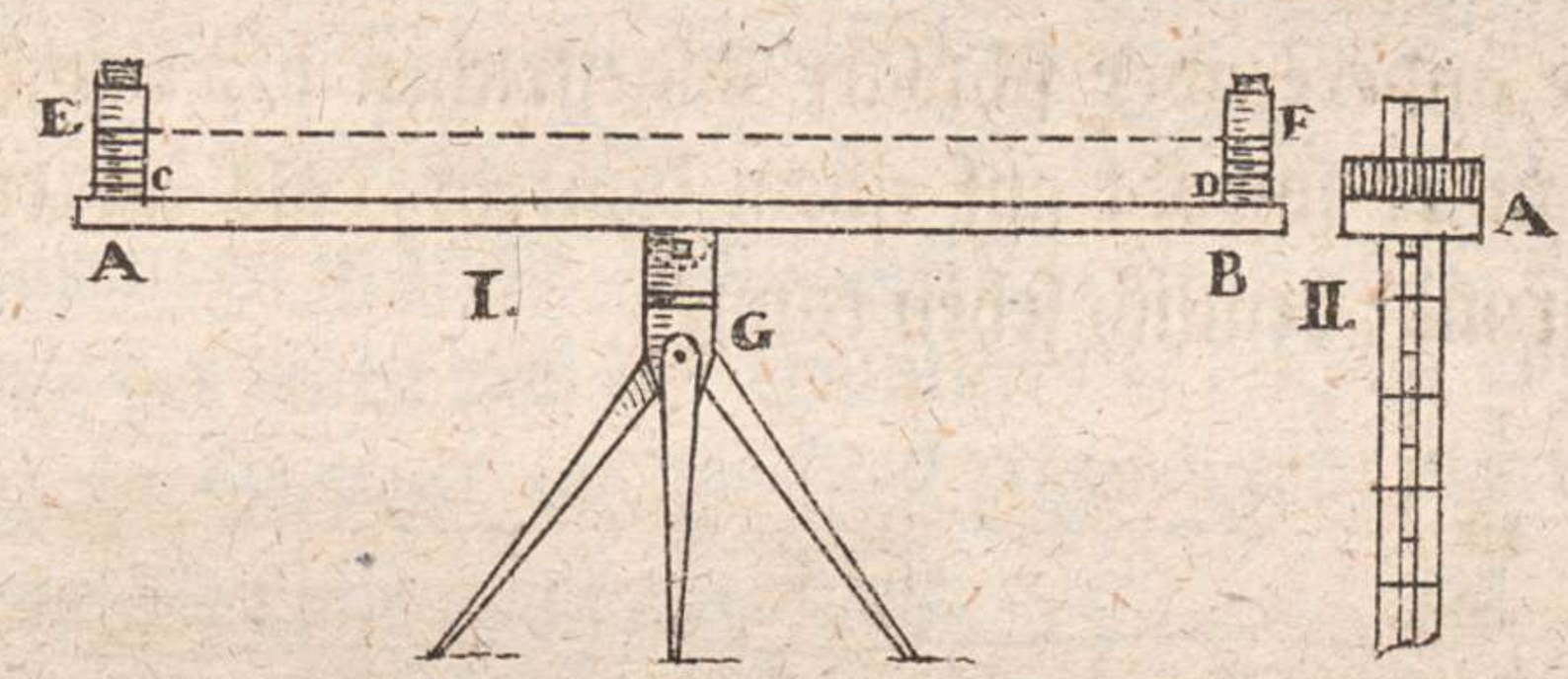
183. **Anmerkung.** Da alles, was auf den Bergen wächst, oder auch gebaut wird, in senkrechter Richtung mit der Grundfläche steht, so muß bey dergleichen Gegenständen auch nur auf die wagerechte Linie, und keineswegs auf die schiefe, Rücksicht genommen werden. Bey Flächen aber, die gepflastert, oder mit etwas bedeckt werden, wie Strassen und Dächer, wird nur die schiefe Linie gemessen, und in Anschlag gebracht.



184. **Aufgabe.** Einen Platz wagerecht abzuebnen.

Man läßt mehrere Pfähle einschlagen, legt eine gerade Latte A B an dieselben, stellt dann die Setzwage auf, und bemerkt bey A und B mit Linien die Höhe der Latte, wodurch man sehen kann, wie viel der Punkt C niederer ist, als der Punkt D. Auf diese Art verfährt man mit allen eingeschlagenen Pfählen. Ist die Höhe überall richtig angezeigt; so weiß man, wie viel Erde an einem Orte angeschüttet, und an einem andern hinweg genommen werden muß.

185. Auf diese Art kann man auch das Gefäll eines laufenden Wassers in Bächen und Kanälen finden, welches man Nivelliren oder Abwägen des Wassers nennt, wenn die Linien, durch die man den Fall des Wassers untersuchen will, nicht zu lange sind. Denn wenn man auf die obige Art mehrere Pfähle an dem Ufer einschlägt; so wird der letzte anzeigen, um wie viel die Linie von der Latte abwärts länger ist, als die erste.



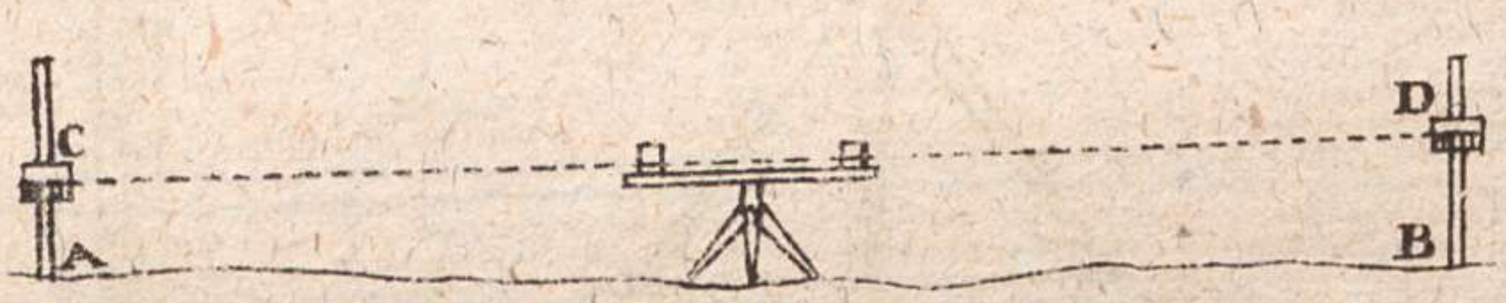
186. **Aufgabe.** Das Gefäll des Wassers auf einer langen Linie zu finden.

Man lasse sich Fig. I. eine Latte A B von ungefähr 5 Schuhen Länge verfertigen; befestige auf selber eine blecherne Röhre; versehe sie bey C und D mit einer Mutterschraube, um zwey runde Gläser E und F, welche unten mit Zinn oder Messing gefaßt sind, darauf schrauben zu können; gieße in die Gläser dunkel gefärbtes, z. B. rothes Wasser, und setze das Instrument auf ein Stativ G.

Bey diesem Instrumente kann sich das Wasser ohne Hinderniß von einem Glase zum andern

bewegen, und die beyden Wasserhöhen E und F bleiben nach hydrostatischen Gesetzen immer in einer wagerechten Fläche, man mag das Instrument richten, wie man will.

Ferners läßt man sich eine Latte Fig. II. von ungefähr 7 bis 8 Schuh Länge verfertigen, die in Schuhe, Zolle und Linien eingetheilt ist, und richtet ein Querbrettchen A so, daß es sich auf- und abschieben läßt, wovon die eine Hälfte weiß, die andere aber schwarz angestrichen ist, damit man es sowohl auf einem dunkeln, als lichten Grunde deutlich sehen kann.



Soll man nun das Gefäll von einer Linie A B bestimmen; so stelle man das Instrument in die Mitte dieser Linie, und richte es nach dem Punkte A. Man stelle sich sodann einige Schritte hinter das Instrument, sehe an den obersten Flächen des rothen Wassers vorbey nach der Latte A, und lasse sich das bewegliche Querbrettchen so lange auf- und abschieben, bis die zwey Oberflächen des Wassers, und die obere Linie des Brettchens sich decken; so wird dieses die Höhe A C nach Schuhen, Zollen und Linien bestimmen. Läßt man ferners das Instrument unbeweglich stehen, und sieht nach dem Punkte B;

so zeigt auch hier das Brettchen an der Latte die Höhe der Linie B D. Da nun C D vollkommen wagerecht ist; so erhält man den Fall von A B, wenn man A C von B D abzieht.

Das Gefäll von Linien, welche mehrere Standpunkte erfordern, kann also eben so leicht erhalten werden; weil man nur, um das Ganze zu finden, das Gefäll der einzelnen Punkte zusammen addiren darf. Ereignet es sich, daß eine solche Linie manchmahl steigt, und manchmahl fällt; so müssen die steigenden Punkte, und die fallenden in zwey Reihen gesetzt, und die Summe der einen von der Sunime der andern abgezogen werden; wo der Rest zeigen wird, um wie viel die Linie steigt oder fällt.

Das bisher angezeigte Verfahren wird für den Künstler und Werkmann um so brauchbarer seyn, als er sich das dazu nöthige einfache Instrument mit geringen Kosten anschaffen kann.

Bey Linien, welche eine Länge von mehreren Stunden haben, kömmt auch der scheinbare Horizont, der von dem wahren abweicht, in Betracht. Weil aber so lange Linien im Kunstfache nie vorkommen; so wird ihre fernere Behandlung hier für unnöthig gehalten.

187. **Aufgabe. Die Länge einer Linie, oder auch den Inhalt einer Fläche mit Schritten zu bestimmen.**

Man messe eine Linie von 10 oder 20 Schuhen; gehe öfters auf derselben auf und ab; doch ohne sich im Gehen einen Zwang anzuthun, damit die Schritte nicht ungleich werden, und zähle jedes Mahl die Schritte. Hat man z. B. gefunden, daß 6 Schritte 10 Schuhe ausmachen; so hat man ein Verhältniß, nach welchem man die Länge der abgeschrittenen Linien für Fälle, die keine große Genauigkeit erfordern, bestimmen kann.

Von den Verwandlungen der Figuren.

188. **Erklärung.** Eine Figur in eine andere verwandeln, heißt der Figur eine andere Gestalt geben, ohne ihren Flächeninhalt zu verändern. Dazu dienen nun vorzüglich folgende bereits oben erwiesene Lehrsätze:

Ein jedes Parallellogram kann durch eine Diagonallinie in zwey gleiche Dreyecke getheilt werden.

Parallellograme von einerley Grundlinie und Höhe sind einander gleich.

In jedem rechtwinklichten Dreyecke ist das Quadrat der Hypothenuse eben so groß, als die Quadrate der beyden Katheten zusammen genommen.

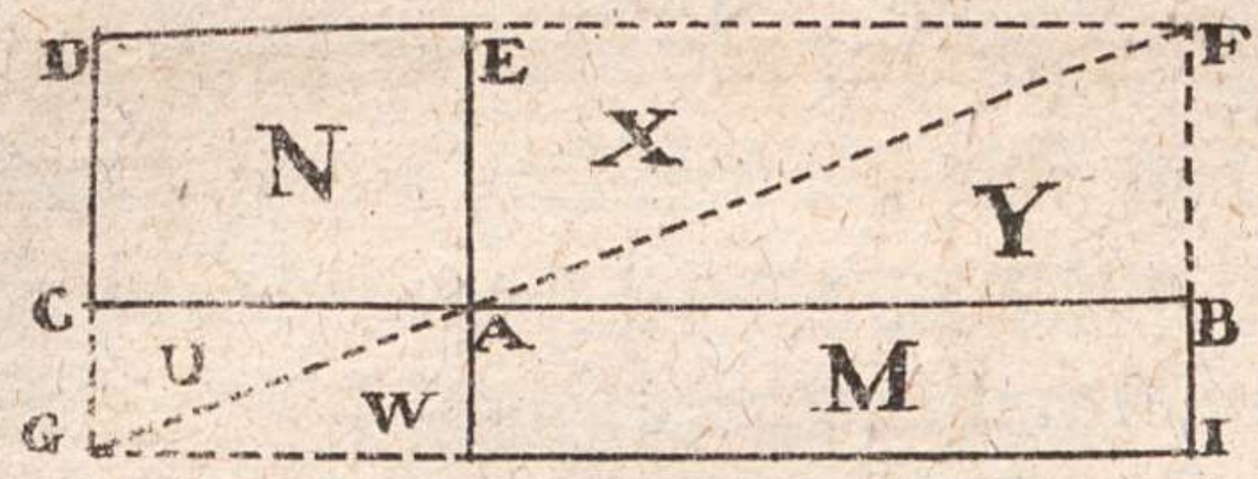
189. **Aufgabe.** Eine Raute in ein Rechteck zu verwandeln.

Man erhebe auf den Endespunkten der Grundlinie A B zwey Senkrechte A C und B D; so ist nach Nro. 115. A B C D = A E F B.

190. **Aufgabe. Ein stumpfwinklichtes Dreyeck in ein gleichschenklichtes oder rechtwinklichtes zu verwandeln.**

Man erhebe aus einem Endpunkte der Grundlinie A B, hier in A eine Senkrechte A E; ziehe aus der Spitze C eine Parallellinie mit A B, und schließe das Dreyeck mit E B: so ist A E B = A C B. Bey dem gleichschenklichten Dreyecke wird eine Senkrechte in der Mitte von A B errichtet, und von C D abgeschnitten, wodurch wieder A D B = A B C wird. Beydes ist aus Nro. 117. Seite 57 klar.

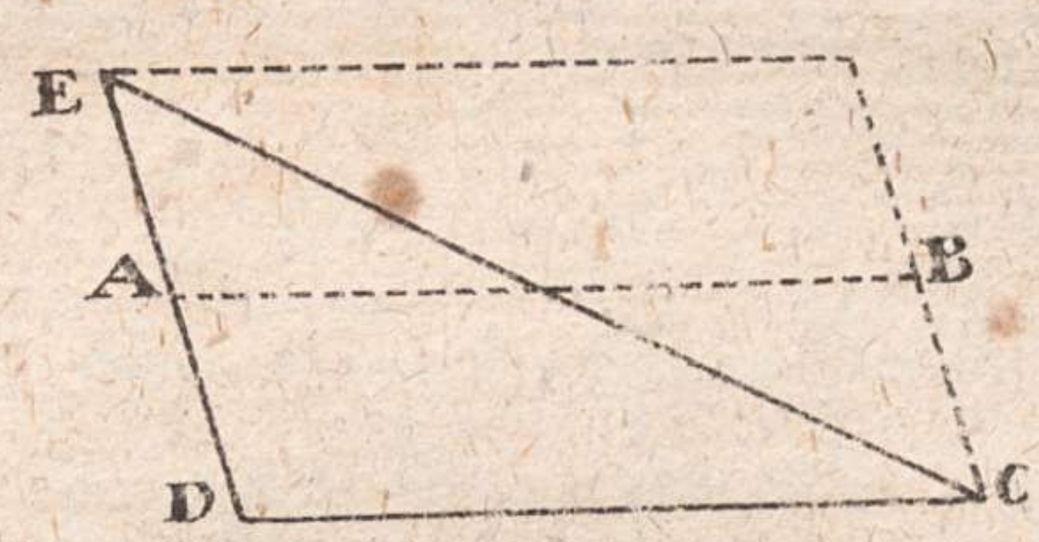
191. **Aufgabe. Ein Parallellogram in ein anders zu verwandeln, wovon entweder die Grundlinie, oder die Höhe gegeben ist.**



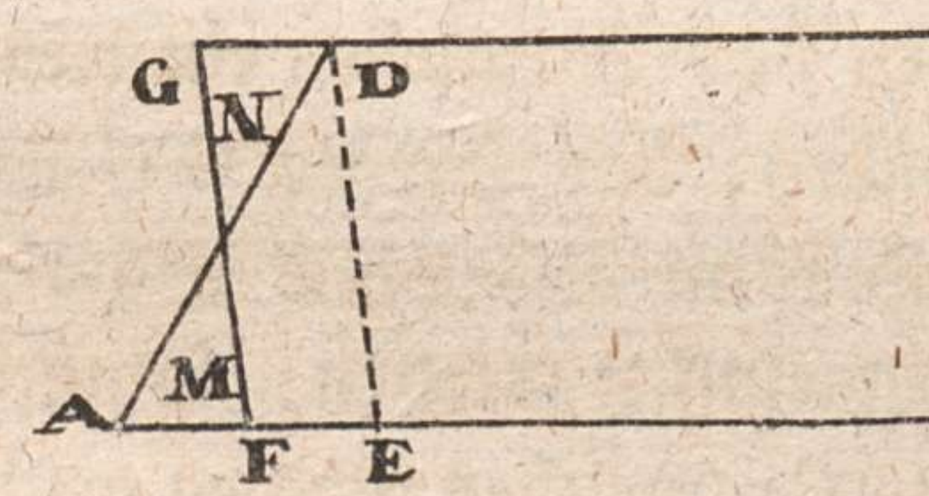
Das Parallellogram A C D E soll in ein anders verwandelt werden, wovon die Grundlinie A B gegeben wird. Man errichte bey B einen Perpendikel B F, verlängere die Linie D E bis F; ziehe die Diagonallinie F A gegen G, verlängere auch D C, bis sie die Diagonallinie in G schneidet; ziehe G I parallel mit C B, und verlängere F B bis I: so ist das Parallellogram N gleich dem Parallelograme M. Denn wenn man das ganze Parallellogram D G I F durch die Diagonallinie F G in zwey gleiche Dreyecke D G F, und F G I zerschnitten betrachtet; so zeigt es sich, daß die Dreyecke U und W, dann auch X und Y einander gleich sind; nimmt man von einem jeden der beyden grossen Dreyecke F G D und F G I die kleinen U und W, X und Y hinweg; so müssen die übergebliebenen Parallelograme N und M einander gleich bleiben.

Ist anstatt der Grundlinie die Höhe gegeben; so kann man sie ebenfalls an die Linie C A setzen, und wie oben verfahren, wo aber die Grundlinie zur Höhe wird.

192. Aufgabe. Ein Dreyeck in ein Parallellogram zu verwandeln.



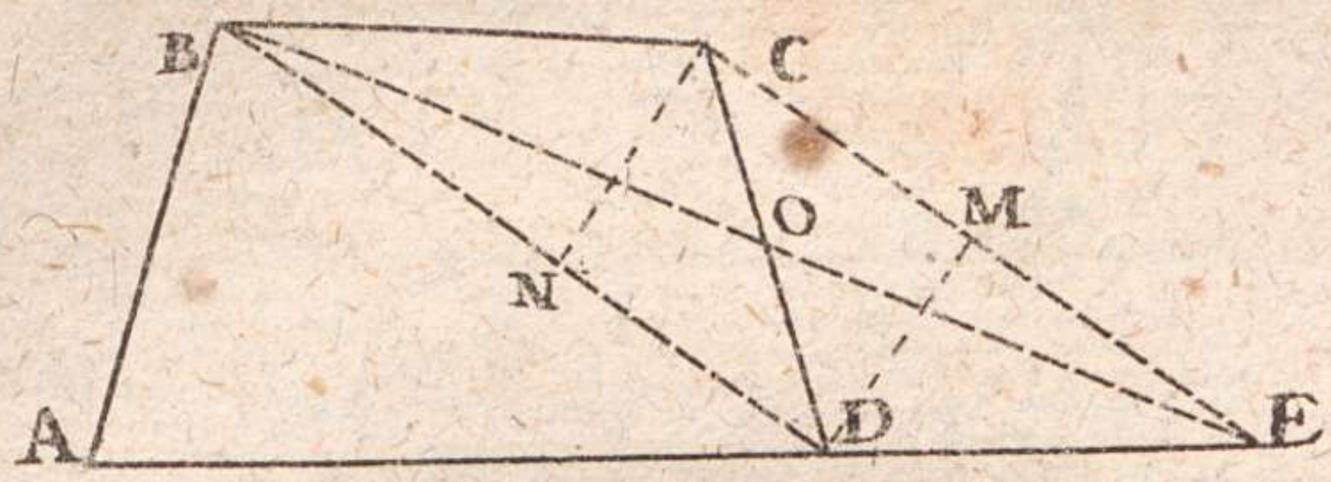
Da die Dreyecke Hälften von Parallellogramen sind, so ergänze man sie zu solchen, und halbire sie durch einen Parallelschnitt, wie hier durch A B; so ist das Parallellogram A B C D, gleich dem Dreyecke E D C. Oder man halbire D E, und ziehe A B mit D C parallel, so geschieht das Nähmliche.



193. Aufgabe. **Ein Paralleltrapez A B C D in ein Parallellogram zu verwandeln.**

Man ziehe D E mit B C parallel, halbire A E, ziehe F G parallel mit D E, und verlängere C D bis G; so ist das Parallellogram G C B F = A B C D; weil die Dreyecke M und N gleiche Grundlinien und Höhen haben, folglich durch M eben so viel hinweg geschnitten wird, als durch N hinzu kömmt.

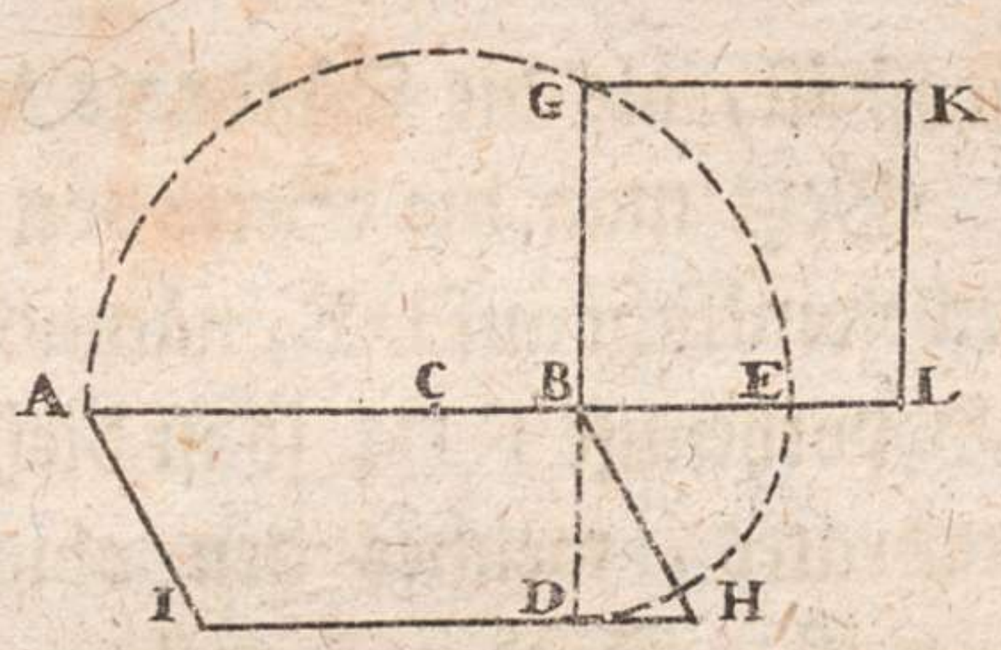
194. Aufgabe. **Ein Trapezoid in ein Dreyeck zu verwandeln.**



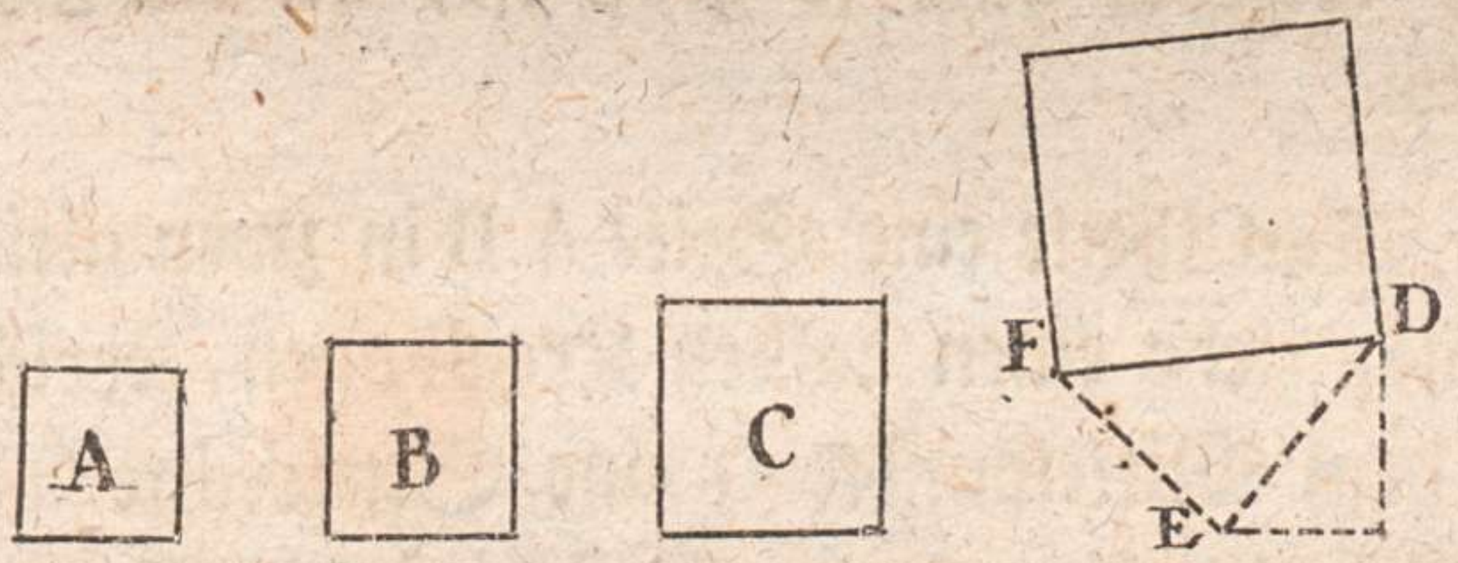
Man ziehe in dem Trapetzoide A B C D die Linie B D, so bleibt noch das Dreyeck B D C übrig; zieht man nun mit B D die Parallellinie C E, und verlängert die Grundlinie A D bis E; so gibt B E die Gränze des neuen Dreyeckes A B E, welches dem gegebenen Trapetzoide vollkommen gleich ist. Denn die Dreyecke B E C, und C D E sind einander gleich, weil sie einerley Grundlinie C E, und wegen den Parallelen einerley Höhe D M und C N haben; das Dreyeck C O E ist beyden gemein, und kann also ohne Schaden der Gleichheit hinweggelassen werden: folglich bleibt das Dreyeck B O C, welches hinweg geschnitten wird, gleich dem Dreyecke O D E, welches hinzu kömmt.

195. Zusatz. Da hier das Trapetzoid um eine Seite vermindert wurde; so kann auch ein jedes unregelmäßige Vieleck auf die nähmliche Art immer um eine Seite vermindert werden, bis es zum Dreyecke wird, und folglich läßt sich auch jedes unregelmäßige Vieleck in ein Dreyeck verwandeln.

196. Aufgabe. Ein Parallellogram in ein Quadrat zu verwandeln.



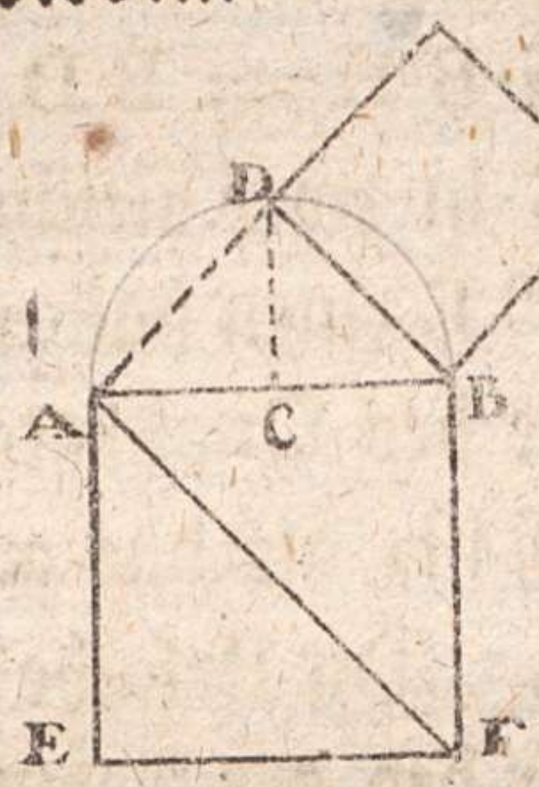
Man verlängere die Seite A B des gegebenen Parallellograms A B H I um die Höhe desselben, so, daß B E = B D wird; theile die ganze Linie A E in zwey gleiche Theile A C und C E; ziehe mit C E einen halben Kreisbogen: so ist G B die Seite des Quadrats B G K L, welches eben so groß ist, als das gegebene Parallelogram A B H I. Die Ursache dieser Verwandlung werden wir bey der Aehnlichkeit der Figuren, und den Proportionallinien angeben.



197. Aufgabe. Mehrere Quadrate in Eines zu verwandeln. Z. B. die Quadrate A, B und C.

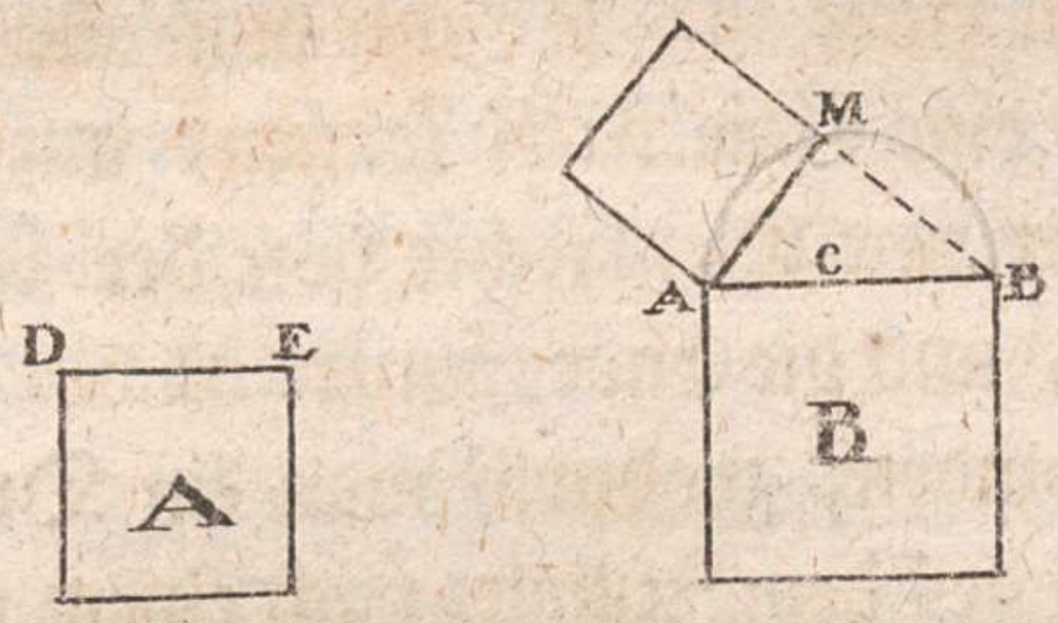
Man setze die Seiten von zweyen gegebenen Quadraten A und B unter einen rechten Winkel zusammen, und ziehe die Hypothenuse D E; so ist dieses die Seite eines Quadrates, welches

eben so groß ist, als die Quadrate A und B zusammen. Setzt man die Seite von dem Quadrate C rechtwinklicht auf D E, nämlich E F, und zieht die Hypothenuse F D; so ist diese die Seite eines Quadrates, welches den obigen dreyen A B C gleich ist. Sind noch mehrere Quadrate gegeben; so können sie auf diese Art alle in Eines verwandelt werden.



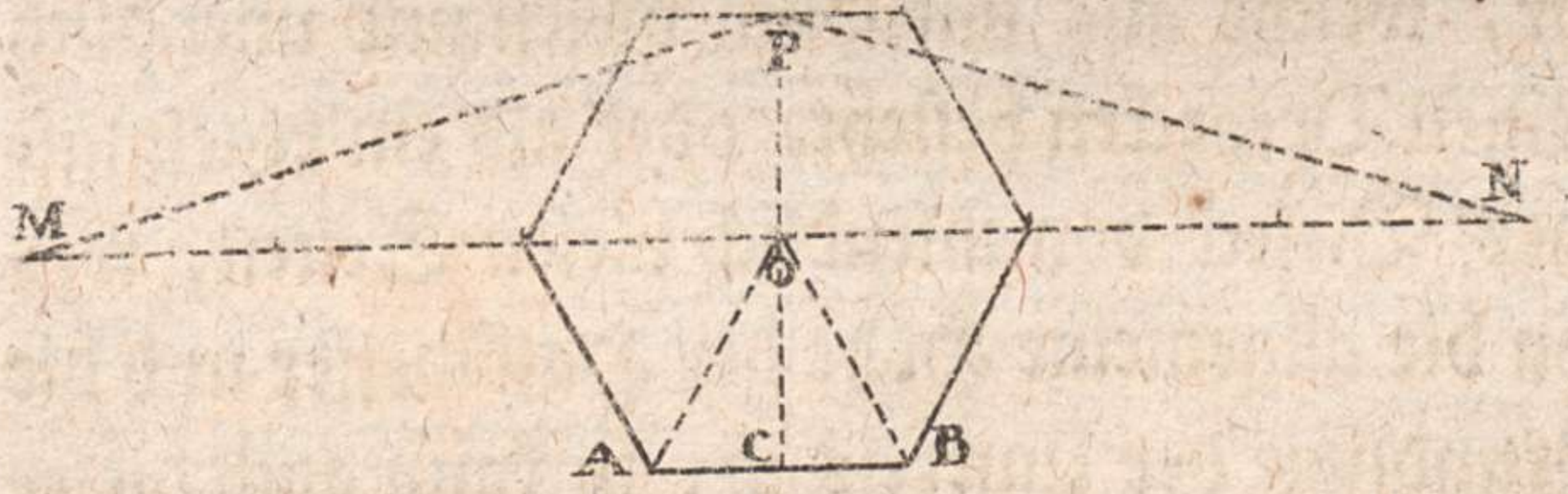
198. Aufgabe. Ein Quadrat zu zeichnen, welches halb so groß ist, als ein gegebenes.

Man theile eine Seite A B in zwey gleiche Theile, ziehe einen halben Kreisbogen, errichte aus dem Mittelpunkte C eine Senkrechte C D, und ziehe die Linie D B; so ist diese die Seite eines Quadrates, welches halb so groß ist, als das gegebene A B F E; denn die beyden Katheten sind hier einander gleich, folglich ihr Quadrat die Hälfte von dem Quadrate der Hypothenuse A B. Zieht man A F; so ist dieses die Seite eines Quadrates, welches noch ein Mahl so groß ist, als das Quadrat A E F B.



199. **Ein Quadrat A von einem andern B abzuziehen.**

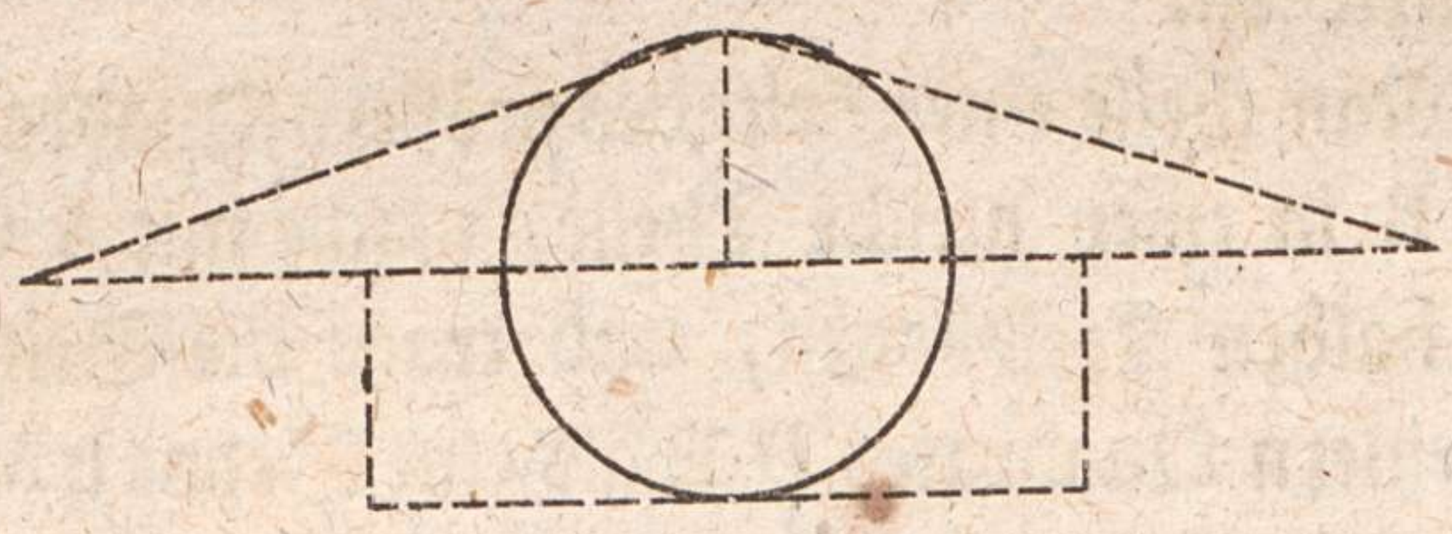
Man theile eine Seite des größern Quadrates A B in zwey gleiche Theile, mache mit A C einen halben Kreisbogen, und trage die Seite des kleinern Quadrates D E als eine Sehne B M darein; so ist M A die Seite des übrig gebliebenen Quadrates. Die Ursachen dieser letzten drey Auflösungen der Aufgaben liegen in dem Lehrsatze Seite 58, und in seinen Zusätzen.



200. **Aufgabe. Ein regelmäßiges Vieleck in ein Dreyeck zu verwandeln.**

Da die Halbmesser, die aus dem Mittelpunkte eines regelmäßigen Vieleckes in die Polygonwinkel gezogen werden, das Vieleck in lauter gleiche Dreyecke zertheilen, wovon A B die Grundlinie eines jeden, und O C die gemein-

schaftliche Höhe ist; so kann man alle Grundlinien auf eine Linie M N tragen, auf derselben wo immer eine Senkrechte von der Länge O C errichten, und die Endespunkte M N P durch Linien verbinden; wodurch man ein Dreyeck erhält, welches dem Inhalte nach einem regelmässigen Vielecke, hier einem Sechsecke, gleich ist.



201. **Aufgabe. Eine Kreisfläche in ein Dreyeck zu verwandeln.**

Betrachtet man die Kreisfläche als eine Figur, welche aus unendlich vielen und unendlich kleinen Dreyecken besteht, oder als ein regelmässiges Vieleck von unendlich vielen Seiten, wovon die allgemeine Höhe der Halbmesser und die Grundlinie der Umkreis ist; so kann auch dieser in ein Dreyeck verwandelt werden, wenn man den Umkreis durch Rechnung sucht, ihn zur Grundlinie, und den Halbmesser zur Höhe nimmt.

202. **Zusatz.** Will man anstatt dem Dreyecke ein Parallellogram; so nimmt man entweder den halben Umkreis und den Halbmesser,

oder den ganzen Umkreis und die Hälfte des Halbmessers, oder auch den Durchmesser und den vierten Theil des Umkreises, und verfertiget daraus ein Parallellogram.

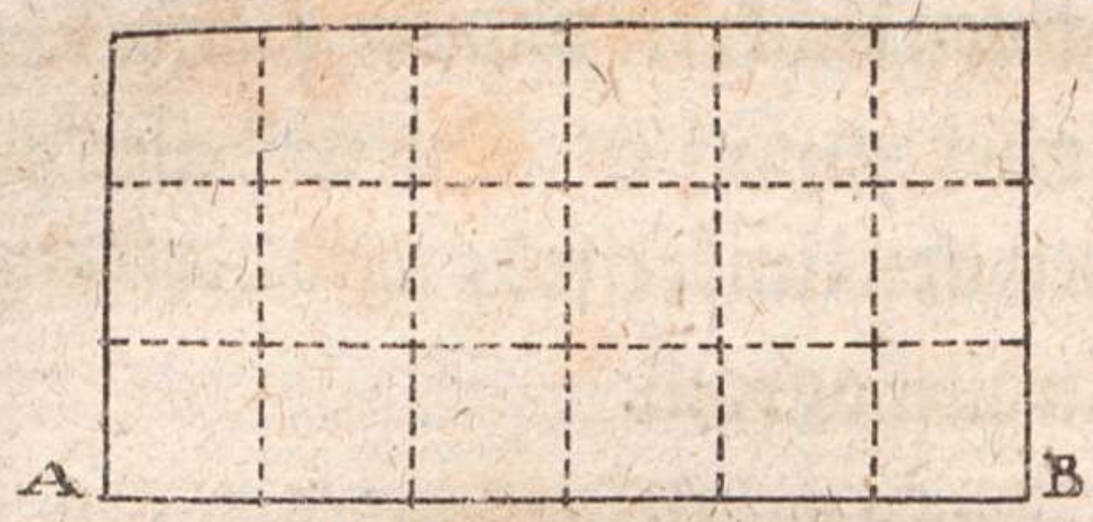
203. Zusatz. Ueberhaupts lassen sich alle Figuren, die in Dreyecke verwandelt werden können, auch in Parallelograme, und aus diesen in Quadrate verwandeln, wie man aus dem, was bisher gesagt wurde, leicht einsehen kann.

Von der Ausrechnung der Flächen.

204. Erklärungen. Will man den Inhalt einer Fläche berechnen; so muß ein bestimmtes Flächenmaaß zum Grunde angenommen werden. Das Quadrat ist hierzu die schicklichste Figur. Man nimmt daher gewöhnlich den Quadratschuh, welches eine Fläche ist, die einen landesüblichen Schuh in der Länge und Breite hält. Nach dem neuen französischen Maaße nimmt man den Quadratmetre, welcher eine Fläche von einem Metre Länge und Breite gibt.

205. Den Inhalt einer Fläche findet man, wenn man einen Quadratschuh so oft in derselben herumlegt, als dieses angeht.

206. Aufgabe. Den Flächeninhalt eines Rechteckes zu finden.



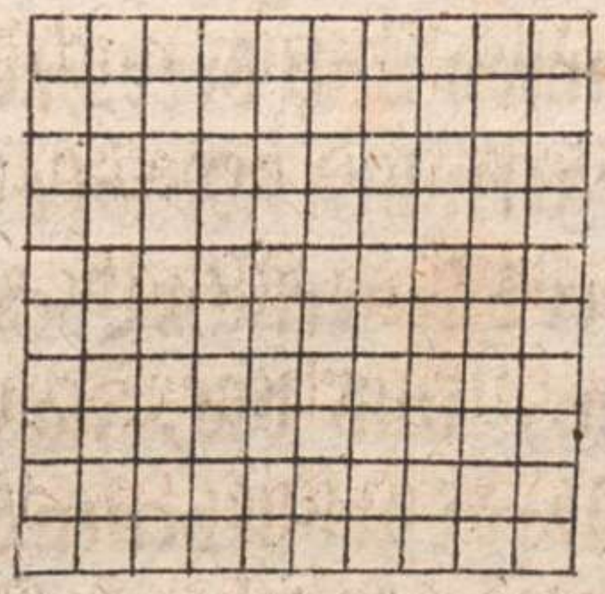
Man multiplizire die Grundlinie mit der Höhe; so hat man den verlangten Inhalt. Denn auf der Grundlinie A B können so viele Quadratschuhe stehen, als viele Schuhe sie lang ist; und diese Reihe von Quadratschuhen kann so oft wiederholt werden, als viele Schuhe das Rechteck breit ist, wie sich aus der Figur deutlich abnehmen läßt.

207. Zusatz. Da in dem Quadrate die Grundlinie gleich der Höhe ist; so gibt jede Zahl mit sich selbst multiplizirt, ein Quadrat.

208. Zusatz. Weil der Schuh im bürgerlichen Maaße in 12 Zolle eingetheilt wird, und der Quadratschuh 12 Zoll Länge und Breite hält; so faßt die ganze Fläche eines solchen Quadrat-Schuhes 144 Quadratzolle in sich. Weil ferners der Quadratzoll 12 Linien Länge und Breite hält; so hat dieser auch 144 Quadratlinien.

Im zehntheiligen Maaße hält der Quadrat-Schuh 10 Zolle Länge und Breite; folglich die ganze Quadratfläche eines Schuhes 100 Quadratzolle, und der Quadratzoll 100 Quadratlinien. Beystehende Figur zeiget einen zehntheiligen

ligen Quadratzoll in seine Quadratlinien eingetheilt an.



Da die Klafter im bürgerlichen Maaße eine Länge von 6 Schuhen hält; so hat die Quadratklafter 6 Schuhe Länge und Breite, folglich 36 Quadratschuhe.

Die Ruthe im zehntheiligen Maaße hat 10 Schuh Länge, und also die Quadratruthe 10 Schuh Länge und Breite, folglich 100 Quadratschuhe.

209. Weil man in unserer Gegend den Inhalt einer Fläche gewöhnlich nur in Quadratschuhen anzeigt, so wollen wir auf die Klafter und Ruthen keine fernere Rücksicht nehmen, und alle Berechnungen nur nach Quadratschuhen, Zollen und Linien ansetzen. 40000 Quadratschuhe, das ist, eine Fläche von 200′ Länge und Breite, geben ein baierisches Juchart, Tagwerk, oder einen Morgen Feldes.

210. Hat man eine Fläche nach dem bürgerlichen Maaße ausgemessen, und durch den verjüngten Maaßstab zu Papier gebracht; so darf

man nur den verjüngten Schuh in 10 Theile eintheilen, wodurch alle Längen nach dem Dezimal-Maaße abgenommen und berechnet, das Ganze aber doch im bürgerlichen Maaße gefunden werden kann; weil der bürgerliche Schuh als Grund-Maaß genommen, und die, nach einer vollendeten Rechnung übrig gebliebenen Dezimal-Quadratzolle in den meisten Fällen in keinen Betracht kommen, oder, wenn es nöthig ist, leicht in zwölftheilige verwandelt werden können, wie wir gleich sehen werden.

211. Aufgabe. Das zehntheilige Quadratmaaß in zwölftheiliges zu verwandeln.

Da 100 zehntheilige Quadratzolle 144 zwölftheilige ausmachen; so hat man ein Verhältniß, nach welchem man dieses leicht bewerkstelligen kann. Es sollen z. B. 46 zehntheilige Quadratzolle in zwölftheilige verwandelt werden; so ist der Ansatz folgender:

X″ zwölfth.?	46″ zehnth.
100 zehnth.	144 zwölfth.

Antw. $66\frac{24}{100} = 66\frac{6}{25}$ zwölfth. Quadratzolle.

Sucht man den Bruch $\frac{6}{25}$ in Quadratlinien; so wird, weil es zwölftheiliges Maaß ist, 6 mit 144 multiplizirt, und durch 25 dividirt, $34\frac{14}{25}$ Quadratlinien geben.

Nach der Regel Detri:

Zehnth.	zwölfth.	zehnth.?
100″	144″	46″

Antw. 66 $\frac{24}{100} = \frac{6}{25}$″.

Bey der Verwandlung des zwölftheiligen Maaßes in zehntheiliges ist das Verfahren umgekehrt, und kann eben so leicht bewerkstelliget werden.

212. Das Zeichen des Quadratmaaßes ist ein kleines Quadrat oberhalb der Zahl neben dem Zeichen der Schuhe und Zolle.

3 □′ 4 □″ 5 □‴

3 Quadratschuhe, 4 Quadratzoll, 5 Quadratlin.

Man könnte im gewöhnlichen Anschreiben anstatt dem □ einen kleinen Horizontalstrich machen, wodurch man in Stand gesetzt wäre, dieses geschwinder und leichter auszudrücken.

$3^{-\prime}$ $4^{-\prime\prime}$. oder 3′, 4″-

3 Quadratschuhe, 4 Quadratzolle.

213. Weil der Quadratschuh im zehntheiligen Maaße 100 Zolle, und der Zoll 100 Linien hält; so können die Schuhe leicht zu Zollen, und die Zolle zu Linien gemacht werden, wenn man nur zwey Nullen anhängt. Will man aber die Zolle zu Schuhen machen; so braucht man nur die letzten zwey Ziffer abzuschneiden, weil dieses eben so viel ist, als wenn man mit 100 di-

vidirte. Beym zwölftheiligen Maaße muß aber jederzeit mit 144 multiplizirt, oder dividirt werden, woraus sich wieder der Vortheil des zehntheiligen Maaßes im Berechnen ergibt. Das zehntheilige Längenmaaß unterscheidet sich also von dem zehntheiligen Quadratmaaße darin, daß bey den Verwandlungen des ersten nur eine Nulle beygesetzt, oder ein Ziffer abgeschnitten werden muß, bey den Verwandlungen des zweyten aber zwey Nullen beygesetzt, und zwey Ziffer abgeschnitten werden. Man kann daher nur immer das Längen- mit dem Längenmaaße, und das Quadrat- mit dem Quadratmaaße vergleichen. Wir wollen von beyden, vom zehntheiligen Längen- und Quadratmaaße einige Beyspiele in verschiedenen Rechnungsarten anführen, und zwar erstens vom zehntheiligen Längenmaaße.

Beyspiel. Es sollen 66′, 4″, 3‴ zu 412′, 7″, 5‴ addirt werden. Man setze die Zahlen wie gewöhnlich unter einander, so ist es eben so viel, als wenn die Schuhe und Zolle zu lauter Linien gemacht, und als solche berechnet würden.

412′7″5‴
66 4 3

479′1″8‴

Nach vollendeter Rechnung setzt man auf die hinterste Zahl drey Striche, auf die folgende zwey, und auf die dritte einen, welches 479 Schuhe, 1 Zoll, und 8 Linien ausmacht. Denn wenn

eine Zahl mehr als 10 in der Addition gibt; so wird sie schon zur vorher gehenden genommen.

Beyspiel. Zu 715′ sollen 64′, 3″ addirt werden. Da in der obern Reihe keine Zolle sind; so macht man dafür eine Nulle, oder bildet sich ein, als wenn eine da stände, und verfahre, wie oben. Ueberhaupts müssen alle Mahl die abgängigen Zahlen in einer oder der andern Reihe mit Nullen ergänzt werden, damit die Zahlen durchaus gleichartig bleiben.

715′0″
64 3
779′3″

Da hier die Linien mangeln; so wird nur die letzte Zahl abgeschnitten, und das Zeichen der Zolle darauf gesetzt.

Beyspiel. Zu 24′, 5‴ sollen 13′, 2″, 7‴ addirt werden. Hier muß man in der obern Reihe wieder die Zolle mit einer Nulle ergänzen.

24′0″5‴
13 2 7
37′3″2‴

Beyspiel. Von 34′, 7″, 3‴ sollen 15′, 8″, 3‴ abgezogen werden.

34′7″3‴
15 8 3
Rest: 18′9″0‴

Beyspiel. Eine Linie von 15′, 7″, 5‴ soll fünf Mahl so lang gemacht werden.

$$\begin{array}{r} 15'7''5''' \\ 5 \\ \hline 78'7''5''' \end{array}$$

Beyspiel. Eine Linie von $10'$, $6'''$ soll in 8 Theile getheilt werden.

$$\begin{array}{r|l} 10'0''6''' & 1', 2'', 5\frac{3}{4}'''. \\ 8 & \end{array}$$

214. **Die Berechnungen im zehntheiligen Quadratmaaße** haben ihren Unterschied größtentheils in der Setzung der Zeichen, im Ansatze sind sie mit den vorher gehenden gleich.

Beyspiel. Es sollen $120^{-'}$, $45^{-''}$, $30^{-'''}$, zu $246^{-'}$, $10^{-'''}$ addirt werden. Da in der letzten Zahl keine Zolle sind; so muß man dafür zwey Nullen setzen, weil die ganze Zahl gleichsam in lauter Quadratlinien berechnet wird.

$$\begin{array}{r} 246'00''10'''- \\ 120\,45\,30 \\ \hline 366'45''40'''- \end{array}$$

Bey Setzung der Zeichen am Ende der Rechnung werden alle Mahl zwey Ziffer abgeschnitten, weil erst drey, nähmlich 100 Quadratlinien, einen Quadratzoll, und 100 Quadratzolle einen Quadratschuh ausmachen.

Beyspiel. Von $524^{-'}$, $25^{-''}$ sollen $215^{-'}$, $24^{-''}$, $3^{-'''}$ abgezogen werden. Da oben keine Linien sind; so setzt man dafür zwey Nullen, und weil die Zahl 3 nur eine Einheit ist;

so muß man ihr ebenfalls eine Nulle vorsetzen, damit die Zahlen durchaus gleichartig werden, welches man in der Folge immer zu beobachten hat.

524′25″00‴-
215 24 03
309′00″97‴-

Wenn bey der Quadratrechnung zwey Linien mit einander multiplizirt werden; so entsteht alle Mahl der Quadratinhalt einer Fläche, wie wir bereits oben gesehen haben. Es halte z. B. die Grundlinie eines regelmäßigen Viereckes 340′, 3‴; die Höhe aber 120′, 5″; wie viel wird der Flächeninhalt betragen? Man ergänze die abgängigen Zahlen durch Nullen, und multiplizire, wie gewöhnlich.

34003‴
12050
1700150
680060
34003
40973′61″50‴-

Da hier Quadratschuhe, Zolle und Linien entstehen, so werden von dem Produkte rückwärts angefangen zwey und zwey Ziffer abgeschnitten.

Durch die Division zweyer Quadratflächen findet man, wie oft eine in der andern enthalten ist. Man will z. B. wissen, wie oft 20-′, 24-″

in $300^{-\prime}$, $30^{-\prime\prime\prime}$ enthalten sind. Man ergänze die abgängigen Zahlen durch Nullen; so erhält man folgenden Ansatz:

$$\begin{array}{l|l} 3000030^{\prime\prime\prime-} & 14\frac{1}{2}\frac{6}{0}\frac{6}{2}\frac{4}{4}\frac{3}{0}\frac{0}{0} \text{ Mahl.} \\ 2024\ 00 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -9760 \\ 2024 \\ 8096 \\ \hline 1664 \end{array}$$

Manchmahl geschieht es, daß eine Quadrat-Zahl durch eine Linie dividirt wird, wo denn der Quotient ebenfalls eine Linie gibt, nähmlich diejenige, welche mit der bekannten multiplizirt die gegebene Quadratzahl hervorbringt.

Beyspiel. Es sollen $4325^{-\prime}$ durch eine Linie von $136'$, $5''$ dividirt werden.

$$\begin{array}{l|l} 4325'00''- & 31', 6'' \\ 1365 & \\ 4095 & \\ \hline -2300 & \\ 1365 & \\ \hline -9350 & \\ 1365 & \\ 8190 & \\ \hline 1160 & \end{array}$$

215. Die Berechnungen im neuen französischen Maaße sind von denen des zehntheiligen Schuhmaaßes nicht unterschieden. Denn da der Metre in 10 Theile, und jeder derselben wieder in 10 andere abgetheilt ist; so braucht man

beym Längenmaaße, wenn man kleinere Theile in größere verwandeln will, nur immer, rückwärts angefangen, Ein Ziffer abzuschneiden. Z. B. Wie viel Metres geben 2345 Zentimetres? Man schneide die Zahlen 5 und 4 ab; so hat man 23, 4, 5, das ist: 23 Metres, 4 Dezimetres, und 5 Zentimetres, wovon man, wie bey dem Schuhmaaße, die Metres mit einem Striche, die Dezimetres mit zwey, die Zentimetres mit drey, und die Millimetres, wenn einige vorhanden sind, mit 4 Strichen bemerken könnte. $23', 4'', 5'''$.

Bey der Anwendung der vier Rechnungs-Arten werden wieder überall die abgängigen Klassen, wie bey dem zehntheiligen Schuhmaaße ersetzt. Es sollen z. B. 20 Metres, 7 Dezimetres und 4 Zentimetres zu 9 Metren und 5 Zentimetren addirt werden; so ist der Ansatz folgender:

$20'$	$7''$	$8'''$
9	0	5
$29'$	$8''$	$3'''$

Summe: $29'$ $8''$ $3'''$
das ist: 29 Metres, 8 Dezimetres und 3 Zentimetres.

216. Nimmt man den Metre nach baierischem Maaße bloß zu $3'$, $5''$ Zoll mit Hinweglassung der Linie und der 4 Punkte; so geben 12 Metres 41 baierische Schuhe, wodurch man leicht eine Anzahl von baierischen Schuhen in Metres, und eine Anzahl von Metren in baierische Schuhe verwandeln kann.

217. Das neue französische Quadratmaaß in Metren ist eben so wenig von dem zehntheiligen Quadratmaaße in Schuhen, Zollen und Linien unterschieden. Denn es enthält der Quadratmetre, weil das Maaß zehntheilig ist, 100 Quadratdezimetres, der Quadratdezimetre 100 Quadratzentimetres, und dieser 100 Quadratmillimetres. Folglich müssen auch hier, wenn man Kleineres zu Größerem machen will, rückwärts angefangen, immer zwey und zwey Ziffer abgeschnitten, und die abängigen Klassen mit zwey Nullen ergänzt werden, wie dieses der Fall bey der Quadratrechnung des zehntheiligen Schuh-Maaßes ist. Will man z. B. vierzig Quadrat-Metres, 17 Dezimetres und 23 Zentimetres von 62 Quadratmetren und 6 Quadratzentimetren abziehen; so kömmt die Rechnung auf folgende Art zu stehen:

62 00 06
40 17 23

Rest: $21'82''83'''-$.

das ist: 21 Quadratmetres, 82 Quadratdezimetres und 83 Quadratzentimetres; wozu man wieder die gewöhnlichen Quadratzeichen setzen kann.

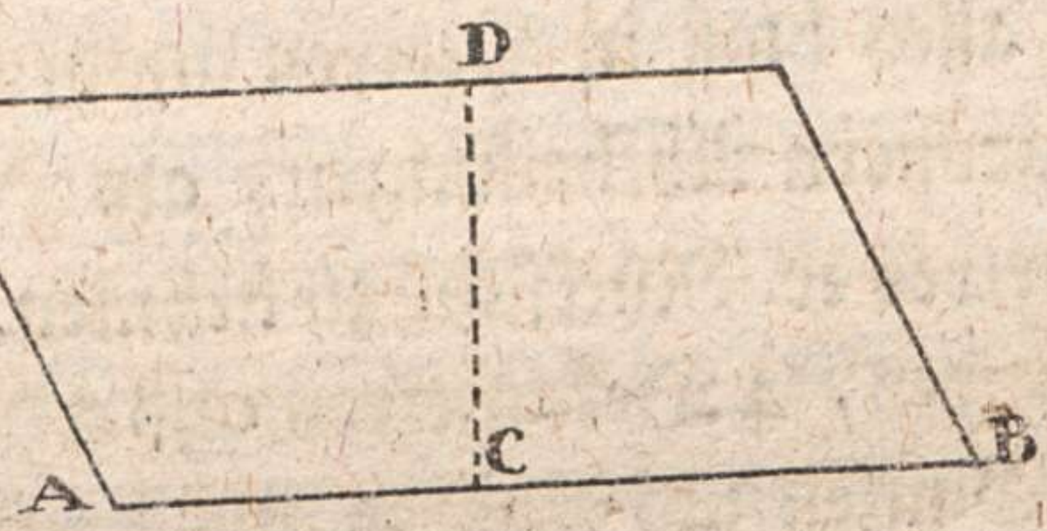
Eine Fläche von 10 Metren Länge und Breite, folglich von 100 Quadratmetren, oder ein Quadrat-Dekametre wird eine Are genannt; und eine andere von 100 Metren Länge und Breiet, folglich von 10000 Quadratmetren, oder ein

Quadrat-Hektometre heißt ein Hektoare, welches Letztere das allgemeine Land- und Feldmaaß, wie bey uns das Juchart oder Tagwerk ist. $33\frac{1}{3}$ Ares geben ungefähr ein baierisches Juchart oder $40000^{-\prime}$, und 3 Jucharte ungefähr eine Hektoare.

218. **Anmerkung.** Weil die Benennungen der Theile des neuen französischen Maaßes für den gemeinen Mann, der ihre Ableitung aus den fremden Sprachen nicht kennt, etwas schwer im Gedächtnisse zu behalten sind; so könnte man alles bloß in Metren ausdrücken, ohne auf die größern Abtheilungen, als Dekametres, Hektometres ꝛc. Rücksicht zu nehmen. Denn 3 Hektometres, 4 Dekametres und 6 Metres machen im Ganzen 346 Metres aus. Bey kleinern Theilen des Metres, als Dezimetres, Zentimetre ꝛc. könnte man die Benennungen, ein Zehntheil, ein Hunderttheil, und ein Tausendtheil eines Metres gebrauchen. Die Zahl $364^{\prime},5^{\prime\prime},8^{\prime\prime\prime},9^{\prime\prime\prime\prime}$ hieße also 364 Metres, 5 Zehntheile, 8 Hundert-Theile und 9 Tausendtheile eines Metres. Bey der Quadrat-Rechnung fände das Nähmliche Statt, und die Zahl $642^{-\prime}$, $13^{-\prime\prime}$, $24^{-\prime\prime\prime}$, würde bequemer durch 642 Quadratmetres, 13 Zehntel und 24 Hundertel ausgedrückt, welches im Teutschen das Nähmliche, wie die obigen fremden Benennungen bedeutet.

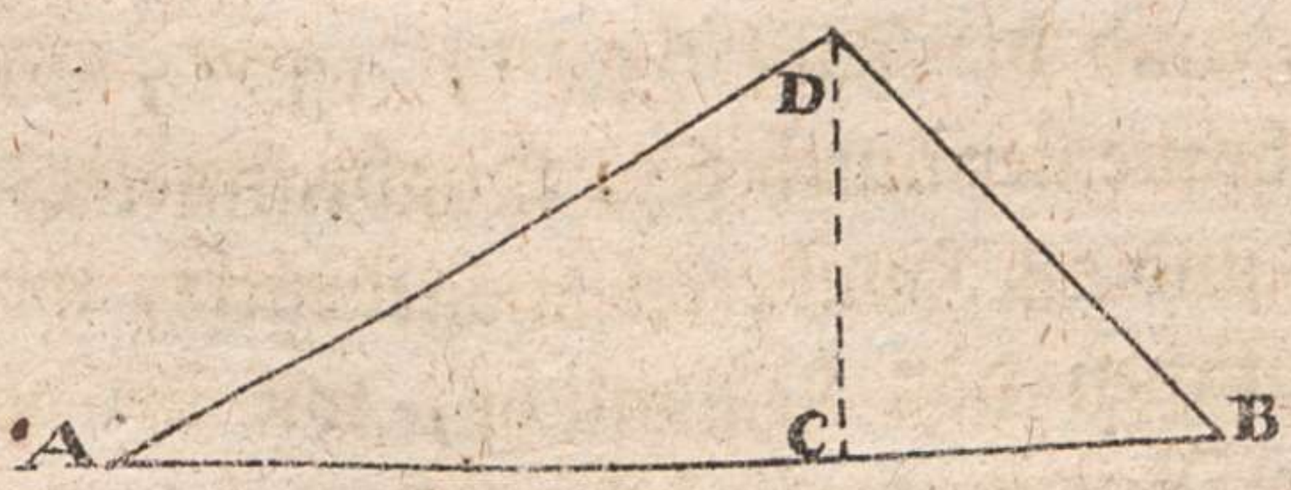
219. Da bey den gewöhnlichen Vermessungen die kleinsten Theile, wie die Linien, manchmahl auch die Zolle, und bey dem französischen Maaße, die Tausend- und Hunderttheile auf dem verjüngten Maaßstabe wegen ihrer Kleinheit nicht mehr abgenommen werden können; so bleiben sie größtentheils ganz hinweg, welches die Rechnungen um vieles erleichtert.

Nach diesen Beyspielen und Bemerkungen wollen wir wieder zu der Berechnung der übrigen Flächen zurückkehren.



220. **Aufgabe. Den Flächeninhalt einer Raute zu finden.**

Da jede Raute in ein Rechteck von gleicher Grundlinie und Höhe verwandelt werden kann; so gibt auch hier die Grundlinie A B multiplizirt mit der Höhe C D den Flächeninhalt.

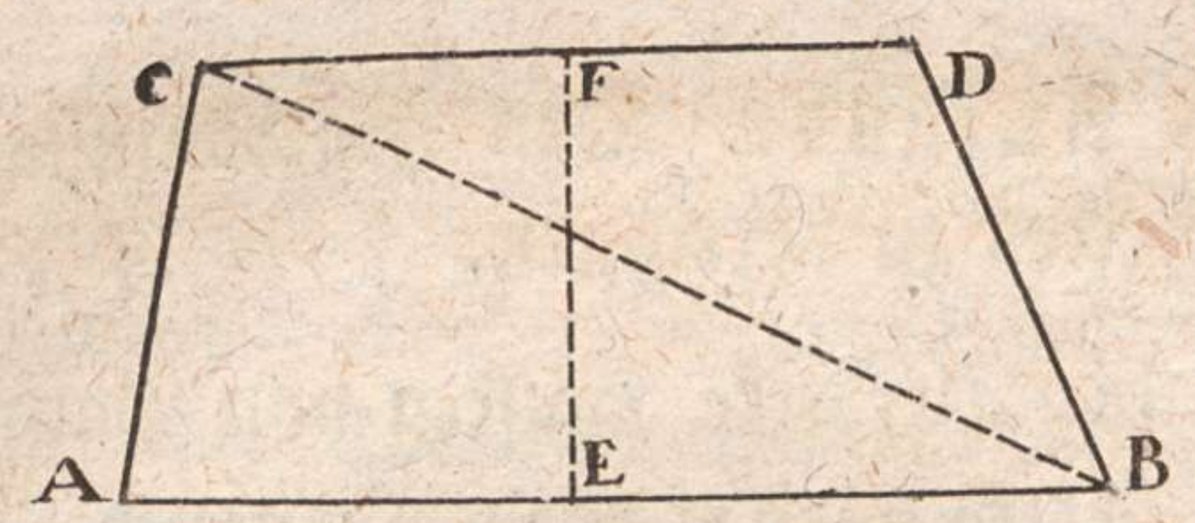


221. Aufgabe. Den Flächeninhalt eines Dreyeckes zu berechnen.

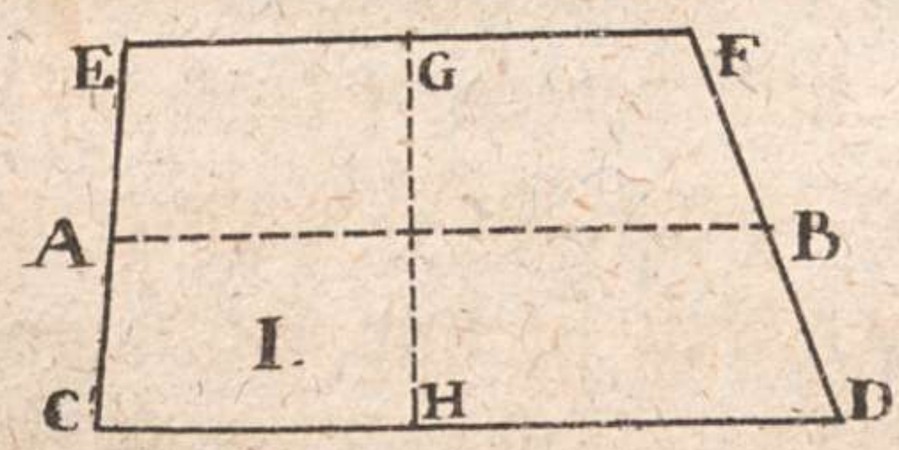
Da die Dreyecke Hälften von Parallellogramen sind; so wird entweder die ganze Grund-Linie A B mit der halben Höhe C D, oder die ganze Höhe C D mit der halben Grundlinie A B multiplizirt, oder auch die ganze Grundlinie mit der ganzen Höhe multiplizirt, und das Produkt durch 2 dividirt.

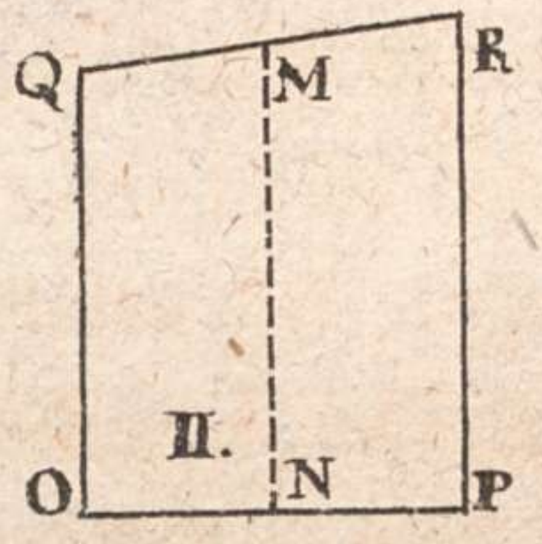
222. Anmerkung. Bey kleinen Figuren, die nicht aufgezeichnet, sondern gleich auf dem Felde ausgerechnet werden, ist es nothwendig, außer der Grundlinie auch die Höhe besonders zu messen. Bey großen Flächen aber, wovon ein ordentlicher Plan aufgenommen wird, fället man in der Zeichnung aus der Spitze der Figur durch feine Linien Perpendikel auf die Grund-Linie, sucht von beyden die Länge auf dem verjüngten Maaßstabe, und berechnet darnach die Figur. Die gefällten Perpendikel werden nach vollendeter Rechnung, weil sie nur Hülfslinien sind, wieder weggelöscht. Hieraus ergibt sich, daß man, um sich nicht großen Unrichtigkeiten auszusetzen, die verschiedenen Linien in der Zeichnung mit der größten Genauigkeit und Reinheit ausführen müsse.

223. Aufgabe. Den Flächeninhalt eines Paralleltrapezes zu finden.



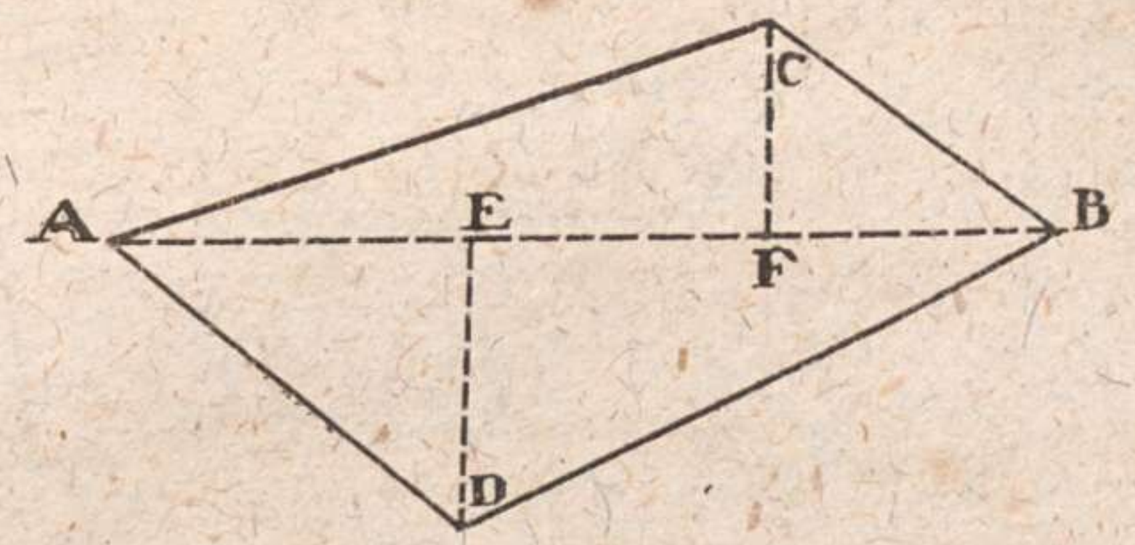
Man kann dieses in zwey Dreyecke zertheilen, und als solche berechnen. Da aber die Dreyecke wegen den Parallellen gleiche Höhe haben; so können auch die beyden Grundlinien A B und C D addirt, und mit der halben Höhe E F multiplizirt werden. Eben so gibt auch die ganze Höhe E F mit dem halben Theile der beyden Grund-Linien den Flächeninhalt eines Paralleltrapezes. Lassen sich die Linien nicht ohne Rest in zwey gleiche Theile zertheilen; so können auch die Grund-Linien A B und C D addirt, mit der ganzen Höhe E F multiplizirt, und das Produkt durch 2 dividirt werden.





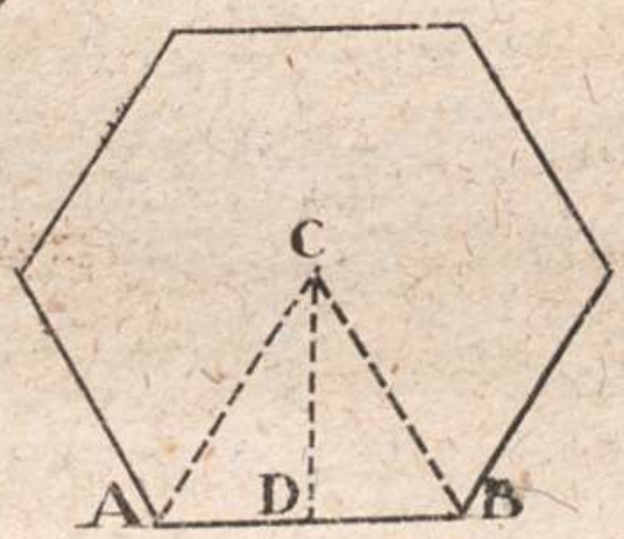
224. Zieht man in einem Paralleltrapeze eine Linie A B in gleicher Entfernung mit C D und E F parallel; so ist A B multiplizirt mit G H der Flächeninhalt des Trapezes C E F D. Fig. I. Eben so ist auch Fig. II. M N multiplizirt mit O P der Flächeninhalt des Trapezes O P Q R;

weil die beyden Trapetzen, gleichsam als in ein Rechteck verwandelt, berechnet werden können.



225. **Aufgabe. Den Flächeninhalt eines Trapetzoiden zu finden.**

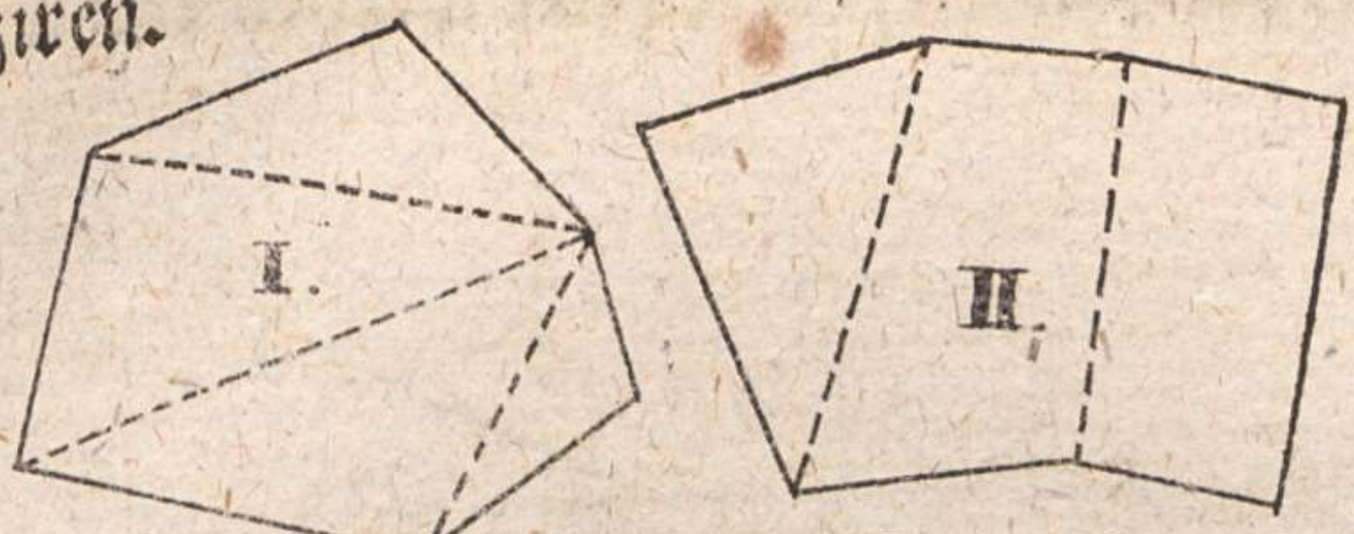
Man berechnet entweder die beyden Dreyecke A C B und A D B einzeln, oder addirt die beyden Höhen derselben C F und D E, und multiplizirt sie mit der gemeinschaftlichen halben Diagonallinie A B.



226. **Aufgabe. Den Flächeninhalt eines regelmäßigen Vieleckes zu finden.**

Da die regelmäßigen Vielecke in lauter gleiche Dreyecke zerfällt werden können; so darf nur ein einziges A B C, wovon A B die Grundlinie, und C D die Höhe ist, ausgerechnet, und das Produkt mit der Anzahl der Seiten multiplizirt werden. Man kann das Vieleck auch als in ein Dreyeck verwandelt betrachten, und die halbe

Höhe C D mit der Summe der Seiten multiplizirt.



227. **Aufgabe. Unregelmäßige Vielecke auszurechnen.**

Diese können entweder in lauter Dreyecke, wie Fig. I., oder in lauter Trapetzen, wie Fig. II. zertheilt, als solche berechnet, und ihr Inhalt in eine Summe gebracht werden.

228. **Aufgabe. Den Inhalt einer Kreis-Fläche zu finden.**

Da die Kreisfläche in ein Dreyeck verwandelt werden kann, wovon der Umkreis die Grundlinie, und der Halbmesser die Höhe ist; so multiplizirt man den ganzen Umkreis mit der Hälfte des Halbmessers, oder den ganzen Halbmesser mit der Hälfte des Umkreises. Ist eines von diesen beyden Stücken nicht bekannt; so muß selbes nach Seite 74 bis 76 gesucht werden. Es hält z. B. der Durchmesser 12 Schuhe, wie groß wird der Flächeninhalt seyn? Man suche zuvor den Umkreis; so wird die ganze Rechnung auf folgende Art aussehen:

X′ Umk. 12′ Durchm.
100′ D. 314′ U.

314
12

628
314

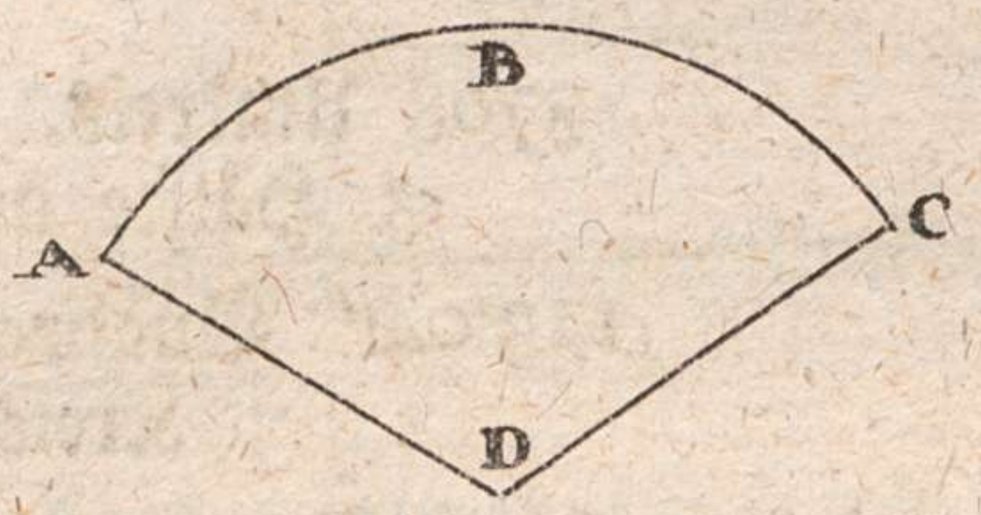
3768 Umkreis.
3 Hälfte des Halbm.

113′04″ Quadratinhalt der Kreisfläche.

Würde man in dem obigen Beyspiele den Durchmesser 12 mit 3 multipliziren, so entstünde die Zahl 36; da nun der Halbmesser, welcher 6′ beträgt, mit sich selbst multiplizirt ebenfalls 36 gibt: so erhält man den Flächeninhalt weit bequemer, wenn man das Quadrat des Halbmessers mit der Zahl 314 multiplizirt, und die zwey lezt ern Ziffer wegen der Division mit 100 abschneidet, die dann beym zehntheiligen Schuhmaaße die Quadratzolle oder Quadratlinien geben. Im vorhergehenden Beyspiele ist der Halbmesser 6, sein Quadrat 36, welches mit 314 multiplizirt den obigen Flächeninhalt $113^{-\prime}/_{04}{}^{-\prime\prime}$ gibt.

Läßt sich der Durchmesser nicht bequem in zwey Halbmesser zertheilen, so kann man auch das Quadrat des Durchmessers mit der Zahl 314 multipliziren, das Produkt aber mit 4 di-

vidiren, und die lezten zwey Ziffer abschneiden. Der Durchmesser wäre z. B. 7′, so ist sein Quadrat 49, dieses mit der Zahl 314 multiplizirt, und mit 4 dividirt, gibt $38^{-}/,46\frac{1}{2}{}^{--}{}''$ zum Flächeninhalte.

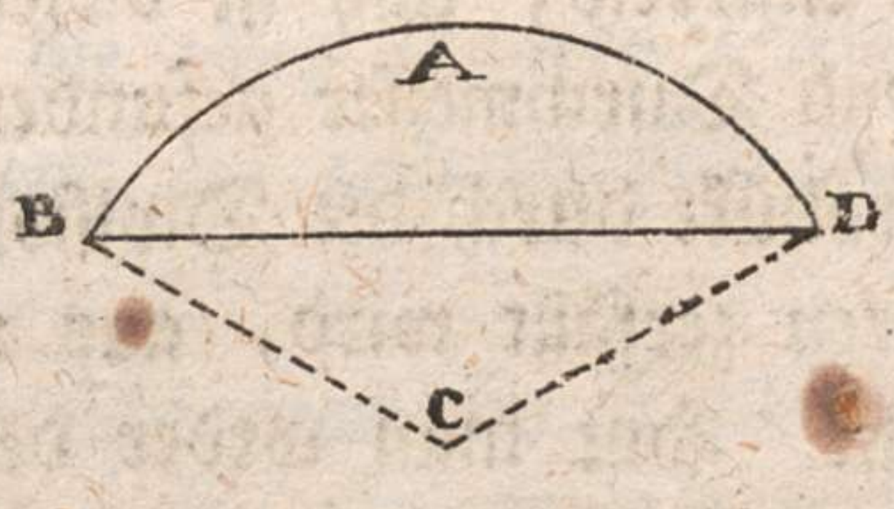


229. Aufgabe. Den Flächeninhalt eines Kreisausschnittes zu finden.

Bevor man dieses zu berechnen im Stande ist, muß man wissen, den wievielten Theil eines Kreises der Ausschnitt in sich enthalte, welches man aus dem Bogen desselben erkennen kann. Der Bogen des Ausschnittes A B C halte z. B. den sechsten Theil des ganzen Kreises in sich, so berechnet man zuvor die ganze Kreisfläche, und dividirt das Produkt mit 6, wodurch man den Flächeninhalt des Kreisausschnittes bekömmt.

Ist der Bogen eines Ausschnittes in Graden gegeben, so wird der Flächeninhalt des Kreises mit der Anzahl der Grade multiplizirt, und durch 360 dividirt: Z. B. der Bogen A B C halte 40°, der Flächeninhalt des Kreises sey $4260^{-}/$; so gibt diese Zahl mit 40 multiplizirt

170400, und durch 360 dividirt $473\frac{1}{3}'$ als den Flächeninhalt des Ausschnittes ABCD.



230. **Aufgabe.** Den Flächeninhalt eines Kreisabschnittes zu finden.

Man berechne zuvor den Kreisausschnitt ABCD, dann das Dreyeck CDB, und ziehe das Letztere von dem Ersteren ab; so bleibt der Rest für den Abschnitt BAD.

231. **Anmerkungen.** Ist in einem Dreyecke oder Parallellograme der Flächeninhalt und die Grundlinie bekannt; so kann die Höhe durch die Division gefunden werden, weil der Flächeninhalt aus der Multiplikation dieser beyden nähmlich der Grundlinie mit der Höhe besteht. Eben so erhält man auch die Grundlinie, wenn der Flächeninhalt und die Höhe gegeben sind. Es halte z. B. die Grundlinie eines Parallellograms $60'$, der Flächeninhalt aber $1200'$, so bekömmt man durch die Division mit 60 die Zahl 20, welches die Höhe des Parallellograms gibt.

232. Ist die Figur ein Dreyeck, so wird mit der halben Grundlinie dividirt, wo dann ebenfalls die Höhe zum Vorscheine kömmt.

233. Wird der Flächeninhalt eines Kreises, und der Halb- oder Durchmesser gegeben, so kann der Umkreis; und ist dieser bekannt, der Halb- und Durchmesser gefunden werden, weil das Produkt durch die Division in diejenigen Faktoren zerfällt wird, aus welchen es entstanden ist. Hat man weder den Durchmesser noch den Umkreis, sondern nur den Flächeninhalt; so kann dieser mit 100 multiplizirt, und durch 314 dividirt werden, wodurch man das Quadrat des Halbmessers erhält, aus welchem, um den eigentlichen Halbmesser zu bekommen, die Quadratwurzel ausgezogen werden muß.

234. Will man was immer für eine Figur in ein Quadrat verwandeln, so darf man nur den Flächeninhalt derselben ausrechnen, ihn als ein Quadrat betrachten, und die Quadratwurzel ausziehen, wodurch man die Seite des Quadrates erhält.

235. Eben so kann auch jede Figur in eine Kreisfläche verwandelt werden, wenn man ihren Inhalt als eine Kreisfläche betrachtet, und nach obiger Art den Halbmesser sucht.

236. Die Umfänge (Perimeter) von Figuren, die einen gleichen Flächeninhalt haben, können sehr von einander unterschieden seyn. Denn betrachtet man ein Quadrat von 400$^{\square'}$ Flächeninhalt; so hat eine Seite 20$'$ und al-

le vier Seiten 80′. Vergleicht man damit ein Parallellogram, wo die Grundlinie 40′, die Höhe 10′ hält, welches ebenfalls 400□′ gibt; so halten die zwey längern Seiten 80′, die zwey kürzern 40′ und folglich der ganze Umfang 100′.

Vergleicht man ein Dreyeck, oder eine Raute mit einem Quadrate von gleichem Flächeninhalte, so wird man finden, daß das Quadrat allemahl den kleinsten Umfang gibt, und daß die übrigen Figuren immer einen kleinern haben, je mehr sie sich der Gleichheit der Linien und Winkel, und dem Regelmäßigen nähern.

Unter den regelmäßigen Vielecken hat das Unendlicheck oder die Kreisfläche bey gleichem Flächeninhalte den kleinsten Umfang, und die übrigen einen immer kleinern, je mehr sie sich dem Kreise nähern, oder je mehr sie Seiten haben.

Diese Betrachtungen kann man sich bey Gebäuden, wo es bloß auf den Raum ankömmt, wohl zu Nutzen machen, und dadurch ein Beträchtliches an Material und Arbeitslohn ersparen. Nicht ohne Bewunderung bemerkt man, sagt ein gewisser Schriftsteller, bey den Bienen, daß sie für ihre Honigbehältnisse das regelmäßige Sechseck wählen, welches ihrem Inhalte nach unter allen Figuren, die bey ihrer

Zusammensetzung keinen Zwischenraum lassen, die größte ist.

Von der Aehnlichkeit der Figuren, und ihren Verhältnissen.

237. **Erklärungen.** Aehnlich sind alle Dinge, die durch kein anders Merkmahl, als durch ihre Größe unterschieden sind. Um diese Eigenschaft zu haben, muß in beyden Figuren, von welchen man eine Aehnlichkeit fordert:

1. die nähmliche Anzahl von Seiten vorhanden seyn;

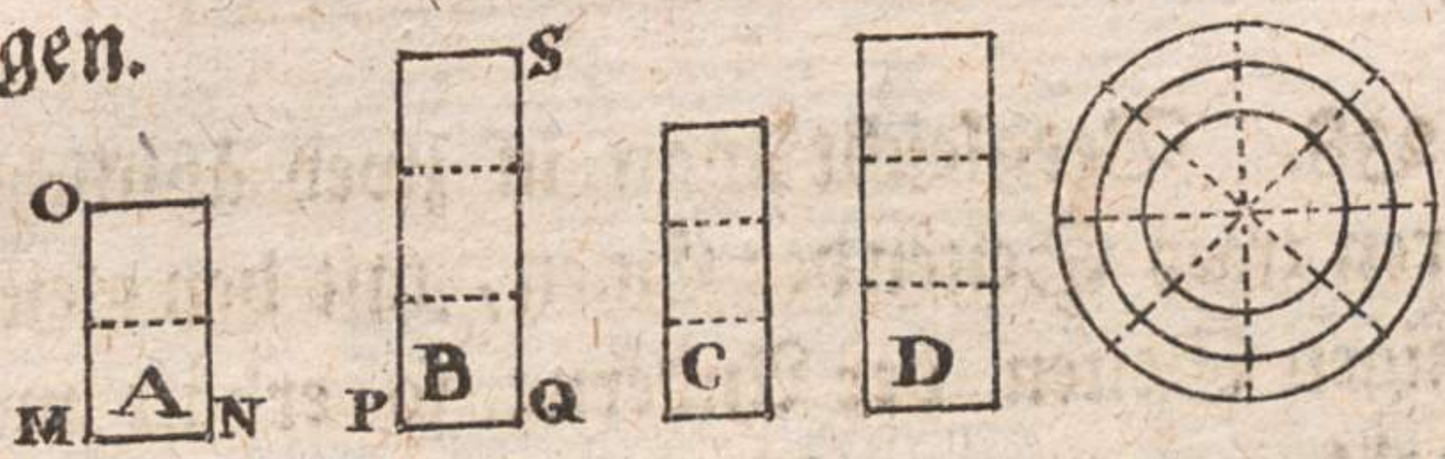
2. müssen in beyden Figuren die Winkel einander gleich seyn, und in einerley Ordnung auf einander folgen;

3. müssen die gleichnahmigen Seiten, oder diejenigen, die gleichen Winkeln gegenüber stehen, mit einander im Verhältnisse seyn.

Nur mit diesen drey Bedingnissen werden sich die Figuren in Nichts, als in ihrer Größe unterscheiden.

Nach diesen Begriffen sind alle Quadrate, alle gleichseitige Dreyecke, alle rechtwinklicht-gleichschenklichte Dreyecke, und alle regelmäßigen Vielecke von gleich vielen Seiten an und für sich einander ähnlich.

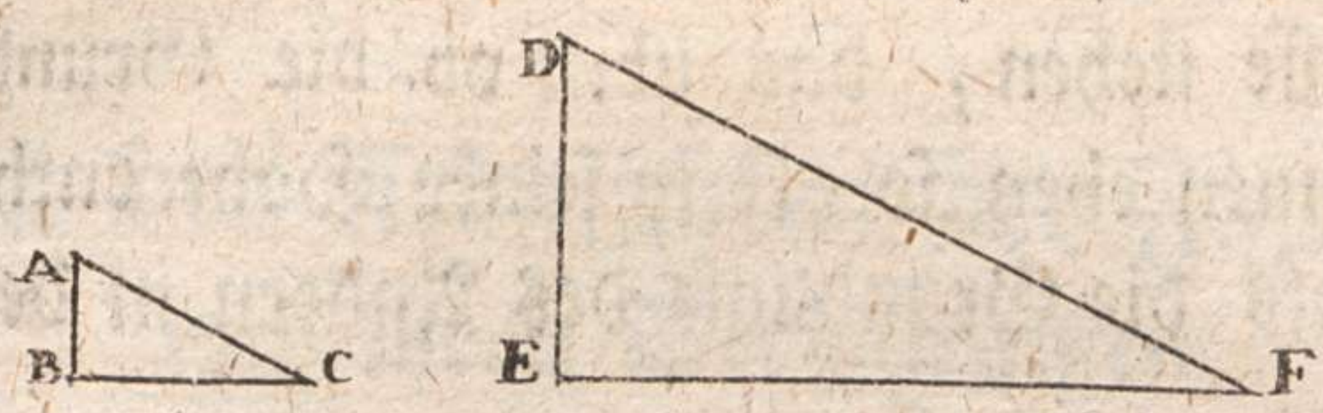
Bey Vierecken und unregelmäßigen Vielecken hat man wohl Acht zu geben, ob die gleichnahmigen Seiten mit einander im Verhältnisse stehen, das ist: ob die Grundlinie des Einen eben so oft in seiner Höhe enthalten sey, als die Grundlinie des Andern in der seinigen.



So ist z. B. das kleine länglichte Viereck A dem größern B nicht ähnlich, weil die Grundlinien nicht mit den Höhen in gleichem Verhältnisse stehen; denn die Grundlinie des kleinen Vierecks M N ist in der Höhe M O nur zweymahl, die Grundlinie des größern aber P Q in ihrer Höhe Q S drey Mahl enthalten. Hingegen ist das Viereck C dem Viereche D ähnlich, weil sowohl in einem als dem andern die Grundlinie drey Mahl in der Höhe enthalten ist.

Zwey Kreise sind einander ähnlich, weil der Halb- oder Durchmesser des Kleinern eben so oft in seinem Umkreise enthalten ist, als der Halb- oder Durchmesser des Großen in dem seinigen, und beyde Kreise in nichts als in ihrer Größe unterschieden sind. Theilt man in konzentrischen, das ist, in solchen Kreisen, die aus einem Mittelpunkte beschrieben sind, was

immer für einen in gleiche Theile, so sind auch alle übrigen durch die Verlängerung der Halbmesser in eben so viele Theile zertheilt.



238. Vergleicht man in zwey ähnlichen Figuren zwey Seiten der Einen, mit den gleichnahmigen Seiten der Andern; so erhält man allemahl eine geometrische Proportion, in welcher aus drey bekannten Theilen der vierte unbekannte kann gefunden werden. Ist z. B. in zwey ähnlichen rechtwinklichten Dreyecken die Höhe des kleinern AB in seiner Grundlinie BC eben so oft enthalten, als die Höhe des größern Dreyecks DE in seiner Grundlinie EF; so verhält sich AB zu BC, wie sich verhält DE zu EF, welches als eine geometrische Proportion auf folgende Art angesetzt wird:

AB : BC = DE : EF.

Ist AB in BC zweymahl enthalten, so muß auch DE in EF zweymahl enthalten seyn. Hält AB, 2′, BC, 4′ und DE, 6′; so muß EF, 12′ halten; weil 2 in 4 zwey Mahl, und 6 in 12 ebenfalls zwey Mahl enthalten ist: folglich 2 : 4 = 6 : 12. Die vordern zwey Glieder haben also alle Mahl den nämlichen Quotienten, wie die hintern zwey.

239. In einer jeden geometrischen Proportion ist das Produkt, welches durch die Multiplikation der äußern zwey Glieder entsteht, gleich dem Produkte der innern zwey. Es ist demnach in der obern Proportion:

$$AB \times EF = BC \times DE$$

in Zahlen $2 \times 12 = 4 \times 6$

oder $24 = 24.$

240. Sind in einer geometrischen Proportion drey Glieder bekannt, so kann das Vierte gefunden werden, wenn man das Produkt der innern zwey durch eines der äußern zwey Glieder dividirt; oder wenn das Produkt der äußern mit einem der innern dividirt wird.

Es sey also in der obigen Proportion die Grundlinie des größern Dreyecks E F unbekannt, so ist:

$$AB : BC = DE : EF$$

$$AB \times EF = BC \times DE$$

$$EF = \frac{BC \times DE}{AB}$$

Mit den obigen Zahlen ausgedrückt, wo die unbekannte Zahl X genannt wird:

$$2 : 4 = 6 : X$$

$$2 \times X = 4 \times 6$$

$$X = \frac{4 \times 6}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

Ist die Grundlinie bekannt, so wird auf die nähm-

liche Art die Höhe gefunden. Es halte z. B. die kleinere Grundlinie 6′: die kleinere Höhe 5′, die größere Grundlinie aber 40′: wie viel wird die Höhe betragen?

$$6' : 5' = 40' : X$$
$$6 \times X = 40 \times 5 = 200$$
$$X = \frac{200}{6} = 33\frac{1}{3} \text{ Schuh.}$$

241. Da sowohl die Ketten- oder reesische Regel, als die Regel Detri nichts anders als eine geometrische Proportion unter einem andern Ansatze vorstellt, so läßt sich das obige Beyspiel auch auf diese zwey Arten ausrechnen. Nach dem Kettensatze.

X′ Höhe — 40′ Grundlinie
6′ Gr. — 5′ H.

Antw. $33\frac{1}{3}'$.

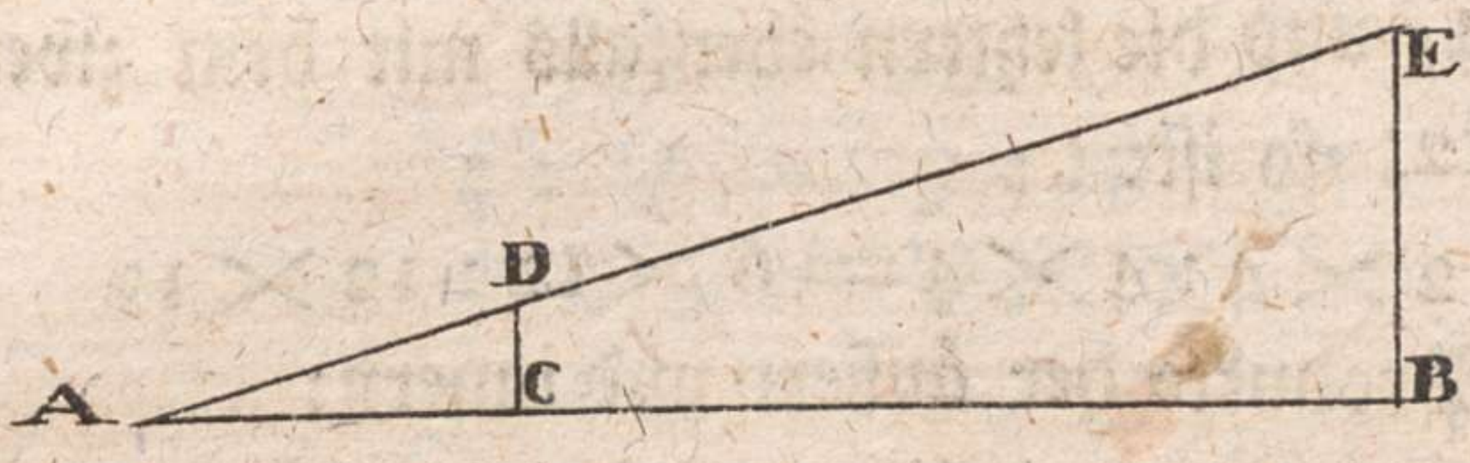
Nach der Regel Detri:
6′ 5′ 40′?

Antw. $33\frac{1}{3}'$.

242. **Aufgabe. Die Höhe eines Baumes oder andern Gegenstandes aus seinem Schatten zu messen.**

Man stecke einen Stab senkrecht in die Erde, und messe sowohl die Höhe als den Schatten desselben; eben so messe man auch den Schatten des Baumes: so läßt sich nach der obigen Art die Höhe desselben durch Rechnung finden;

weil man durch den Schatten die zwey Grundlinien rechtwinklichter Dreyecke, und durch die Höhe des Stabes eine Höhe erhält, wodurch auch die unbekannte Höhe gefunden wird.



243. Will man die obige Aufgabe durch Zeichnung, und den verjüngten Maaßstab auflösen, so macht man eine gerade Linie A B, setzt die Länge des kleinern Schattens nach dem verjüngten Maaße von A nach C, die Höhe des Stabes von C nach D senkrecht; die Länge des größern Schattens von A nach B, und zieht auf B eine unbestimmte Senkrechte: so wird diese, wenn man A E zieht, in einem bestimmten Punkte E durchschnitten, und E B auf dem verjüngten Maaßstabe gefunden werden. Hierin liegt auch der Grund der obigen Ausmessung einer Höhe mit zwey Stangen. Aus dem, was bisher gesagt wurde, erhellt, daß, wenn in was immer für zwey ähnlichen Figuren drey Stücke gegeben sind, das vierte durch Rechnung sich finden läßt.

244. Die geometrische Proportion bleibt so lange, als die Produkte der äußeren zwey Glieder den Produkten der in

nern zwey gleich sind; daher sich die Glieder auf verschiedene Art verändern lassen. Nimmt man z. B. die obige Proportion $2 : 4 = 6 : 12$, und multiplizirt die zwey ersten Glieder mit dem zweyten 4, und die letztern ebenfalls mit dem zweyten 12; so ist:

$$2 \times 4 : 4 \times 4 = 6 \times 12 : 12 \times 12$$

die Produkte der äußern und innern;

$$2 \times 4 \times 12 \times 12 = 4 \times 4 \times 6 \times 12$$

nach vorgenommener Multiplikation:

$$1152 = 1152:$$

und folglich das Verhältniß richtig.

Eben so können auch die Glieder einer geometrischen Proportion durch die Glieder einer andern Proportion der Ordnung nach multiplizirt werden, ohne daß das Verhältniß aufgehoben wird, z. B.

$$2 : 4 = 6 : 12$$
$$3 : 6 = 4 : 8$$
$$2 \times 3 : 4 \times 6 = 6 \times 4 : 12 \times 8$$
$$2 \times 3 \times 12 \times 8 = 4 \times 6 \times 6 \times 4$$
$$576 = 576.$$

Werden die ersten oder letzten zwey Glieder einer geometrischen Proportion mit einer gleichen Größe multiplizirt, oder dividirt; so wird auch dadurch das Verhältniß nicht gestört. Das nähmliche geschieht, wenn die Multiplikation oder Division von gleichen Größen in beyden Gliedern weggelassen wird; denn in beyden Fällen

bleiben die Produkte der äußern zwey Glieder gleich den Produkten der innern zwey: z. B.

$$3 \times 2 : 6 \times 2 = 9 : 18$$
$$3 \times 2 \times 18 = 6 \times 2 \times 9$$
$$108 = 108.$$
$$\tfrac{6}{2} : \tfrac{12}{2} = 9 : 18$$
$$\tfrac{6}{2} \times 18 = \tfrac{12}{2} \times 9$$
$$3 \times 18 = 6 \times 9$$
$$54 = 54.$$

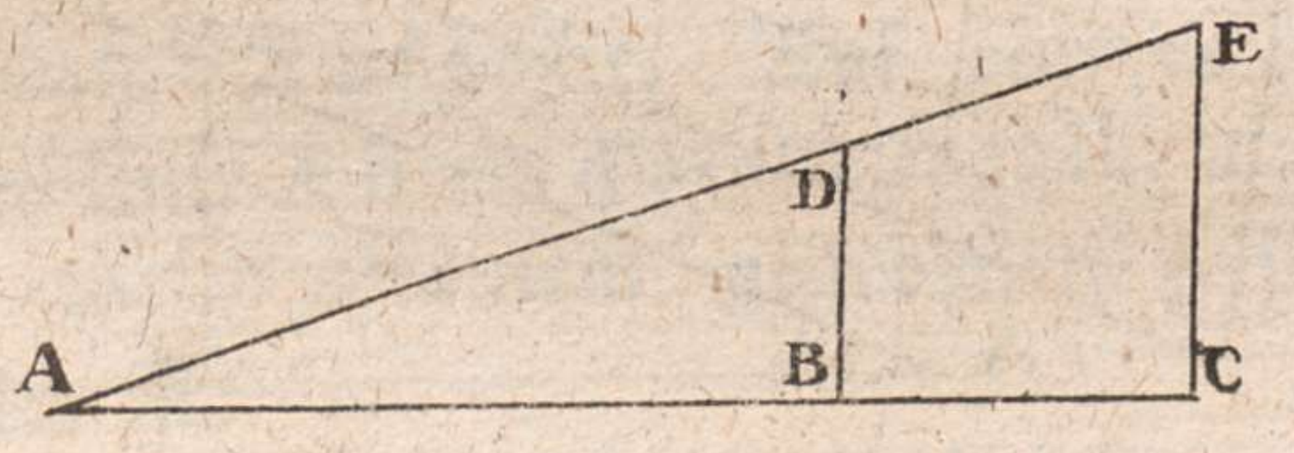
Läßt man die Multiplikation oder Division in beyden Beyspielen hinweg, so ist

im ersten:

$$3 : 6 = 9 : 18$$
$$3 \times 18 = 6 \times 9$$
$$54 = 54$$

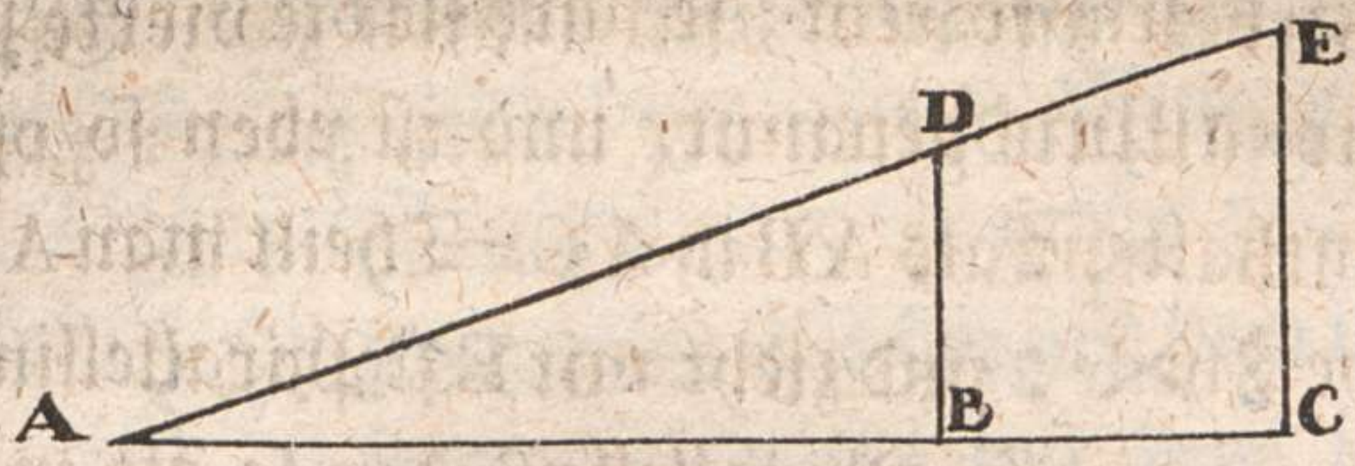
im zweyten:

$$6 : 12 = 9 : 18$$
$$6 \times 18 = 12 \times 9$$
$$108 = 108.$$



245. **Lehrsatz.** Wenn in einem Dreyecke eine Linie mit einer Seite parallel gezogen wird, so sind sowohl die Abschnitte unter sich, als mit den ganzen und abgeschnittenen Seiten im Verhältnisse.

Beweis. Da die Winkel bey D und B wegen den Parallellen die nähmlichen bleiben, wie bey C und E, so entstehen durch den Parallelschnitt zwey ähnliche Dreyecke, wo die gleichnahmigen Seiten miteinander im Verhältnisse



stehen. Es ist also:

$$AB : AC = AD : AE$$

und $$AB : AC = BD : CE.$$

Wird B D nach A parallel fort gerückt, so wächst D E im Verhältnisse um eben so viel als B C; und A B wird im Verhältnisse um eben so viel kürzer als A D. Es ist folglich:

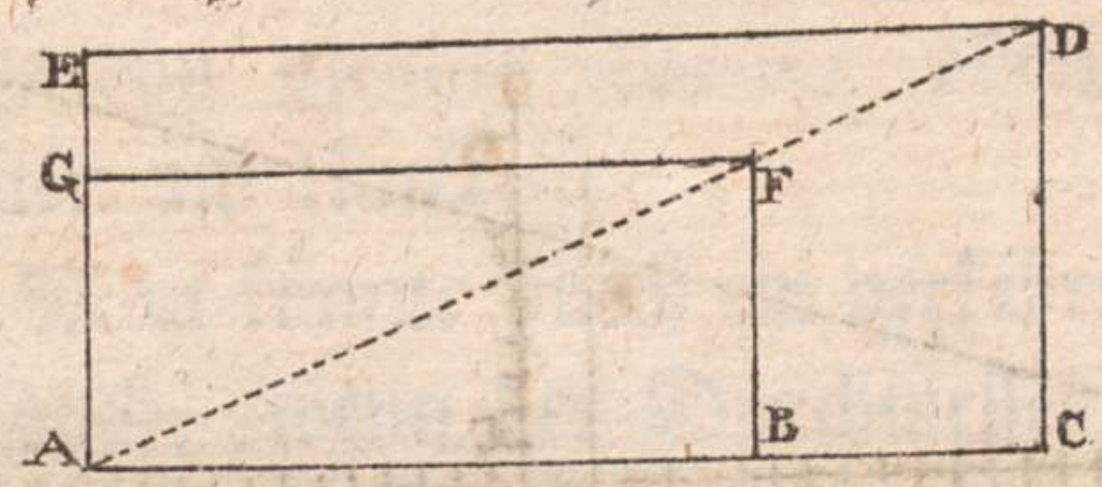
$$AB : BC = AD : DE.$$

246. Zusatz. Theilt man also in einem Dreyecke was immer für eine Linie in gleiche Theile, und zieht von denselben Parallellinien mit einer Seite; so wird auch die andere Seite in eben so viele gleiche Theile zertheilt. Dieß ist die Grundursache der obigen Aufgabe, Seite 19. Nro. 44; eine Linie in gleiche und ungleiche Theile zu zertheilen.

247. Zusatz. Weil die Linie B D mit den andern drey Linien des Dreyecks A C, A E, und E G

im Verhältnisse steht; so wird sie die vierte Proportionallinie genannt, und ist eben so oft in C E enthalten, als A B in A C. Theilt man A C in gleiche Theile, und zieht mit E C Parallellinien; so ist jede dieser Parallellen eben so oft in C E enthalten, als der dadurch von A C abgeschnittene Theil in der ganzen Länge A C.

Hierin liegt der Grund zu den Eintheilungen der verjüngten Maaßstäbe in ihre kleinere Theile, in Zolle und Linien.

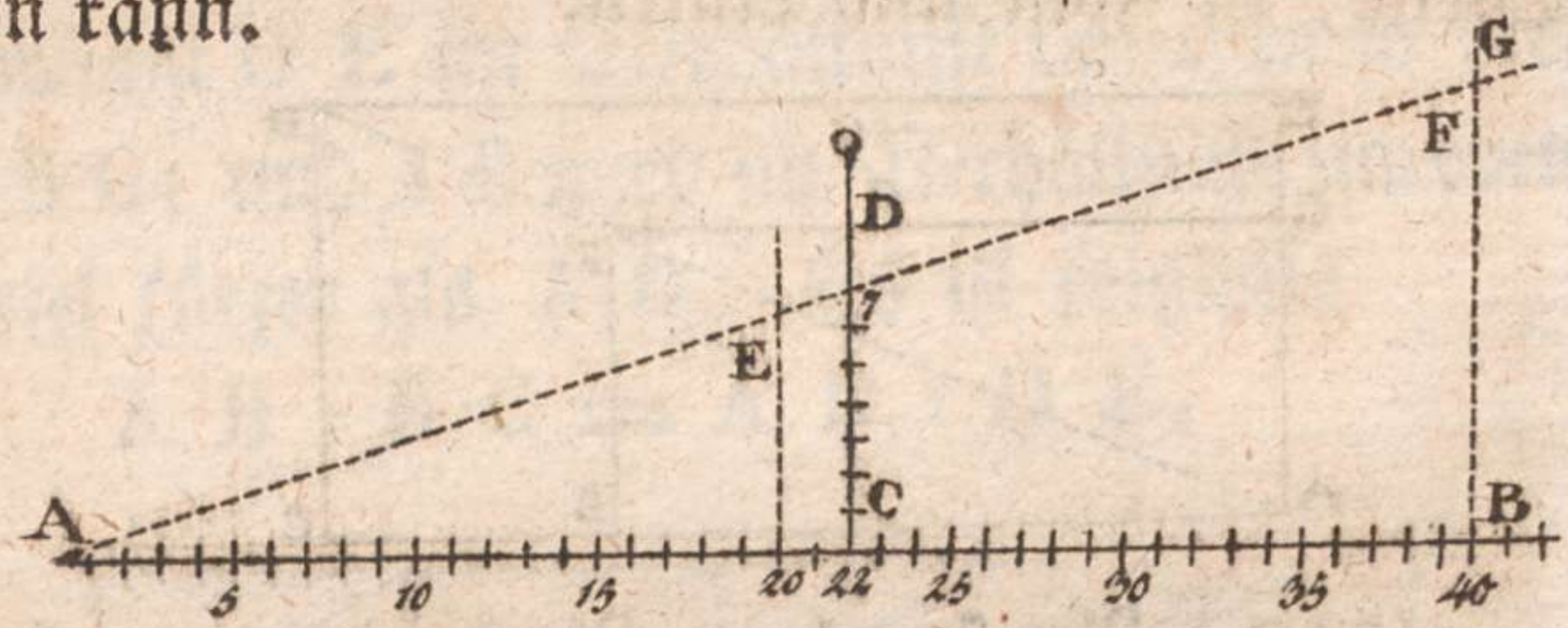


248. Aufgabe. Auf eine gegebene Grundlinie A B ein Parallellogram zu zeichnen, welches einem gegebenen A C D E ähnlich ist.

Man ziehe die Diagonallinie A D, und mache B F und F G parallel mit ihren gegenüber stehenden Seiten C D, und D E; so ist A B F G ähnlich A C D E. Denn A D theilt das Viereck A C D E in zwey gleiche Dreyecke; daher die Seiten B F und F G mit den übrigen im Verhältnisse stehen.

149. Anmerkung. Durch öfteres Nachdenken über eine beqeme Art, die Halb- und Durchmesser für eine bestimmte Anzahl von Thei-

len, zum Gebrauche der Eintheilung des Räderwerkes in der Mechanik, abzunehmen; fiel mir von ungefähr folgendes bequeme und allgemeine Verfahren ein, das sich auf die obigen Proportionallinien gründet, und das sowohl für den gemeinen Arbeiter, der oft wenig im Rechnungswesen erfahren, sich mit allerley, manchmahl nicht gar sichern Handgriffen forthelfen muß, als für den Zeichner mechanischer Werke von Nutzen seyn kann.



250. Aufgabe. Einen Proportional-Maaßstab zu verfertigen, von welchem man die Halbmesser für eine bestimmte Anzahl von Theilen des Umkreises abnehmen kann.

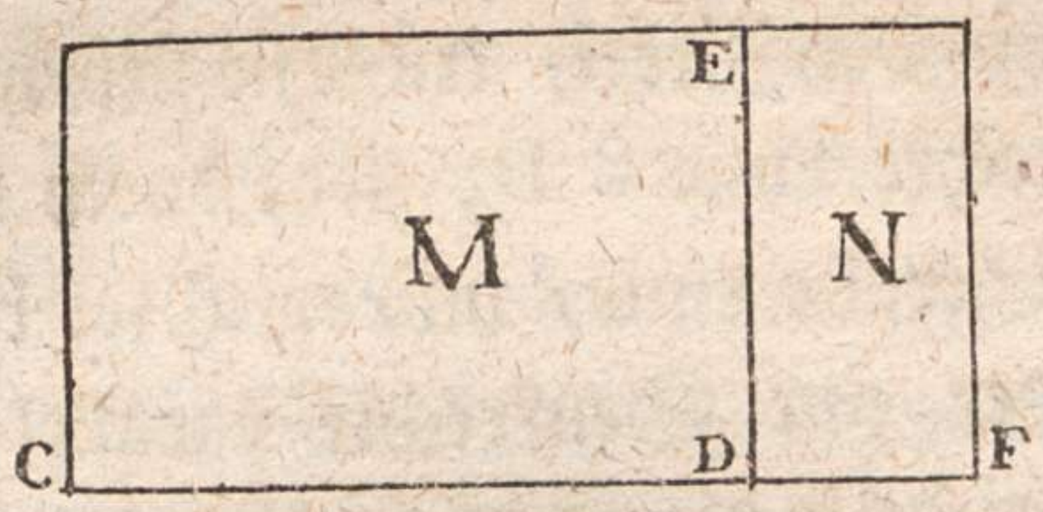
Man theile auf eine gerade Linie A B ungefähr 40 bis 50 gleiche Theile von beliebiger Größe, und errichte bey 22 eine senkrechte Linie; so stellt die Wagerechte A C den Umkreis, und die Senkrechte C D den Durchmesser vor.

Will man nun den Durchmesser eines Kreises auf diesem Maaßstabe abnehmen, welcher 40 Theile enthalten soll, wo einer von dem andern $3\frac{3}{4}$ Zolle entfernt wäre; so nimmt man nur die

$3\frac{3}{4}$ Zolle in den Zirkel, trägt sie sieben Mahl auf die senkrechte Linie C D; zieht durch den Punkt A 7 eine gerade Linie, und errichtet bey 40 oder 20 wieder eine Senkrechte parallel mit C D: so werden diese die Schiefe A D G bey E und F schneiden, und die bey 40 den Durchmesser, bey 20 aber den Halbmesser eines Kreises geben, auf welchem sich 40 Theile von $3\frac{3}{4}$ Zoll Entfernung auftragen lassen. Auf diese Weise erhält man durch eine einzige Querlinie die Halbmesser aller Kreise von gleicher Weite, odergleich weiten Theilen am Umkreise

Man könnte durch ein verkehrtes Verfahren auch, wenn der Durchmesser gegeben ist, die Größe Eines Theiles finden; allein dieses läßt sich bey einer großen Anzahl gleicher Theile besser durch Unterabtheilungen, und bey einer kleinern Zahl ungleicher Theile am leichtesten mechanisch durch Versuche mit dem Zirkel bewerkstelligen, wie wir bereits an einem andern Orte gehört haben.

Da die Räderwerke in der Mechanik nie gar zu groß werden können, so ist das Verhältniß von 7 : 22 worauf sich das obige Verfahren gründet, hinlänglich; besonders wenn man bedenkt, daß sich das Materiale unmöglich so genau bearbeiten läßt, daß dieser kleine Umstand einigen Einfluß haben könnte.



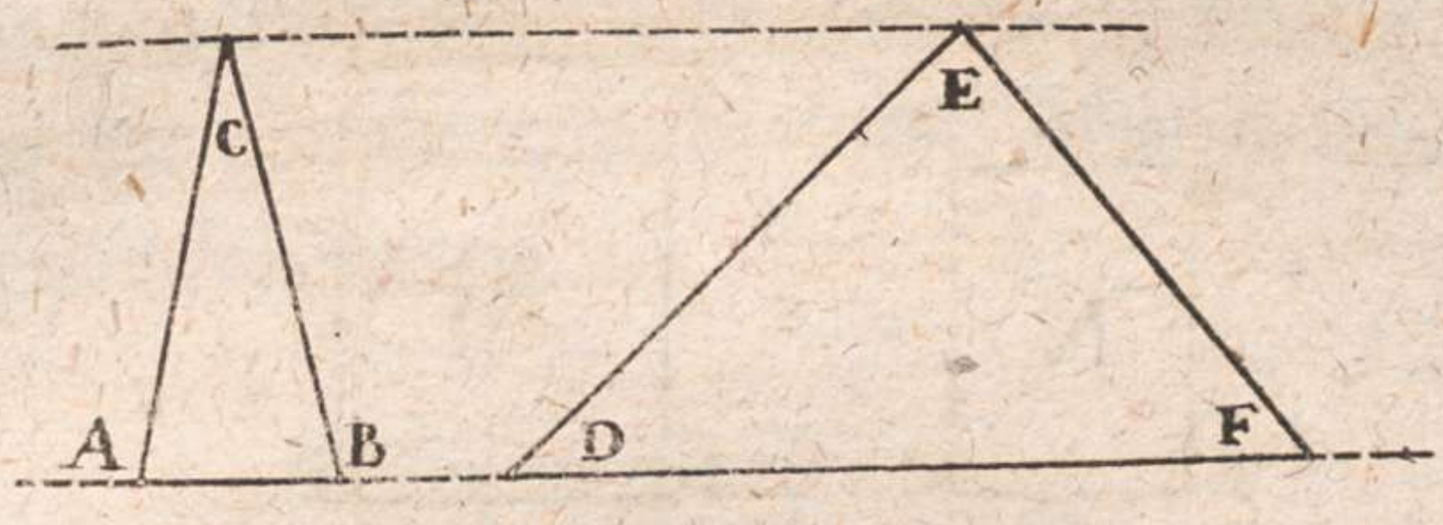
251. Lehrsatz. Die Flächeninhalte zweyer Parallelograme verhalten sich wie die Grundlinien, wenn die Höhen gleich sind; und wie die Höhen, wenn die Grundlinien gleich sind.

Beweis. Der Flächeninhalt von M ist gleich C D × D E; der Flächeninhalt von N ist gleich D E × D F. Es verhält sich also M : N = C D × D E : D E × D F. Läßt man in beyden Verhältnissen die Multiplikation mit D E hinweg, welches nach Seite 139. Nro. 244 ohne Nachtheil geschehen kann; so bleibt M : N = C D : D F.

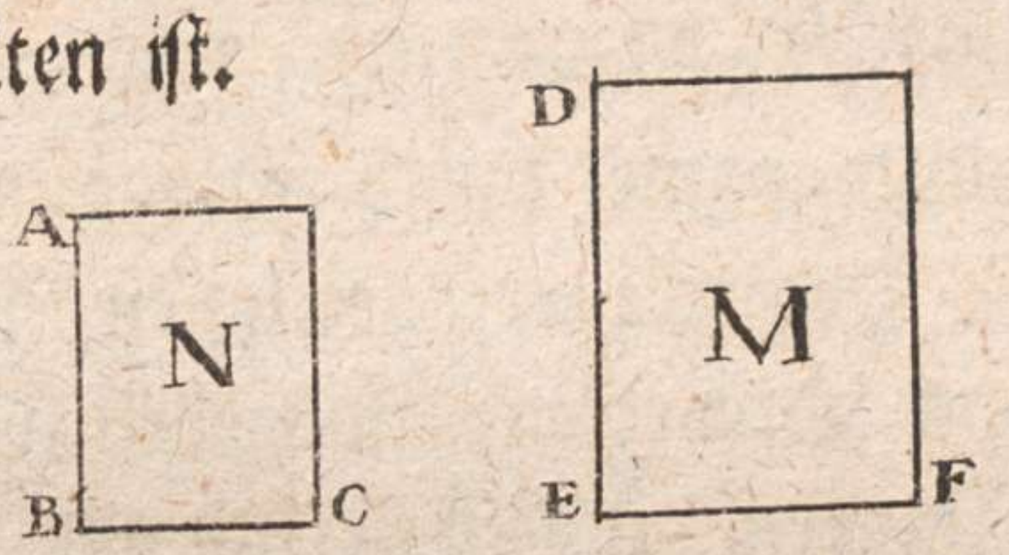
Sind die Grundlinien gleich, so verhalten sich die Flächeninhalte wie die Höhen, welches sich auf die nähmliche Art erweisen läßt.

Ist also in der obigen Figur D F in C D drey Mahl enthalten, so ist der Flächeninhalt von M drey Mahl so groß, als der von N; oder N kann drey Mahl auf M gelegt werden.

252. Zusatz. Da Dreyecke Hälften von Parallelogramen sind, so verhalten sich die Flächeninhalte derselben ebenfalls wie die Grund-



linien, wenn die Höhen gleich sind; und wie die Höhen, wenn die Grundlinien gleich sind. Das Dreyeck A B C ist in dem Dreyecke D E F vier Mahl enthalten, weil die Grundlinie des erstern vier Mahl in der Grundlinie des zweyten enthalten ist.



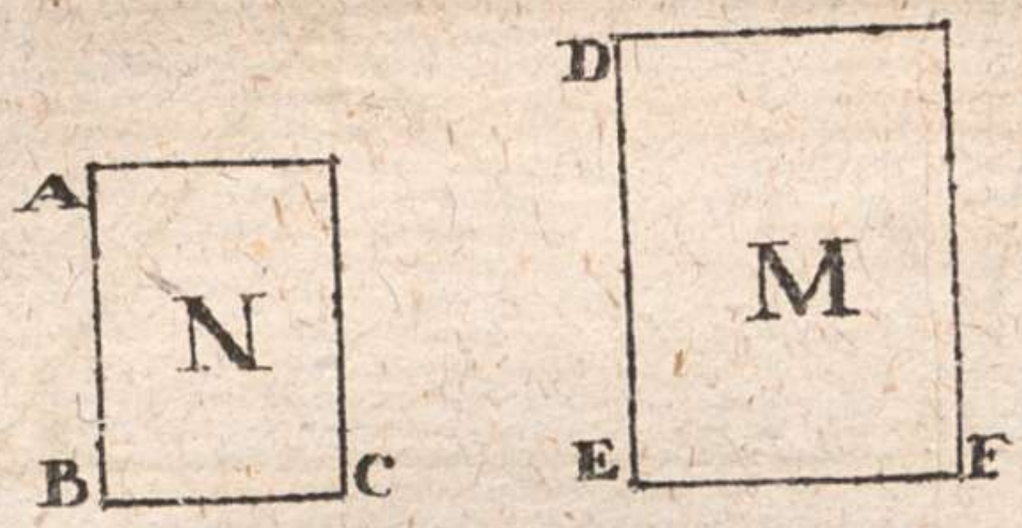
253. **Lehrsatz.** Die Flächeninhalte ähnlicher Figuren verhalten sich wie die Quadrate ihrer ähnlich liegenden, oder gleichnahmigen Seiten.

Beweis. Da die ähnlich liegenden Seiten miteinander im Verhältnisse stehen, so ist

A B : B C = D E : E F.

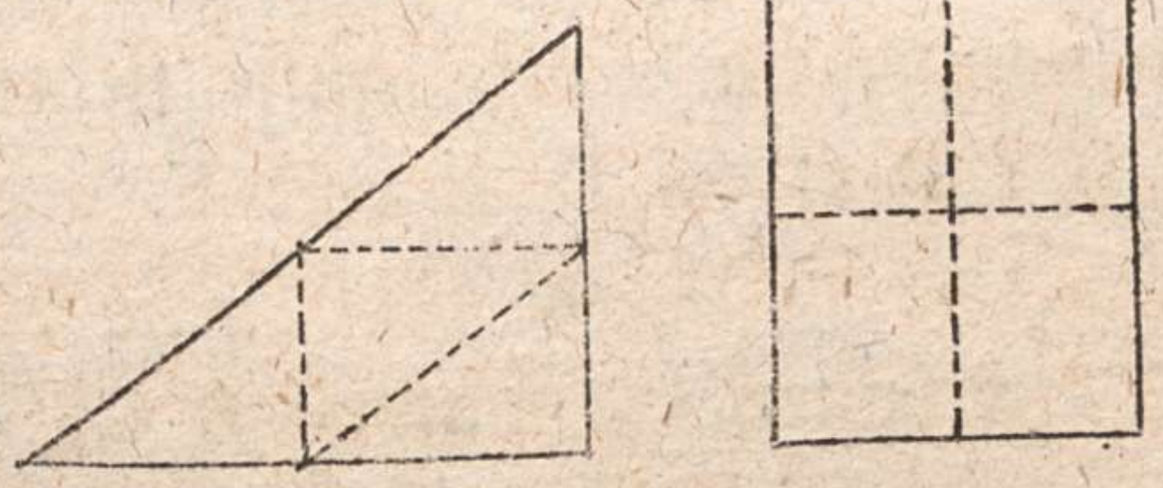
Multiplizirt man sowohl die Theile des ersten Gliedes mit seiner Grundlinie B C, als auch die des zweyten mit der Grundlinie E F, welches nach Seite 139. Nro. 244. ohne Schaden des Verhältnisses geschehen kann, so ist:

A B × B C : B C × B C = D E × E F : E F × E F



Da nun A B × B C den Flächeninhalt von N, und B C × B C das Quadrat von B C gibt, und das nähmliche auch bey M geschieht; so ist der Flächeninhalt von N zum Flächeninhalte von M, wie das Quadrat von B C zum Quadrate von E F; das ist: $N : M = BC^2 : EF^2$. Weil sich nun Parallellograme durch Diagonallinien in zwey gleiche Dreyecke zerfällen lassen, so gilt dieses auch von Dreyecken; und eben so von allen übrigen Figuren, indem sie sich alle in Dreyecke zertheilen, oder in solche verwandeln lassen.

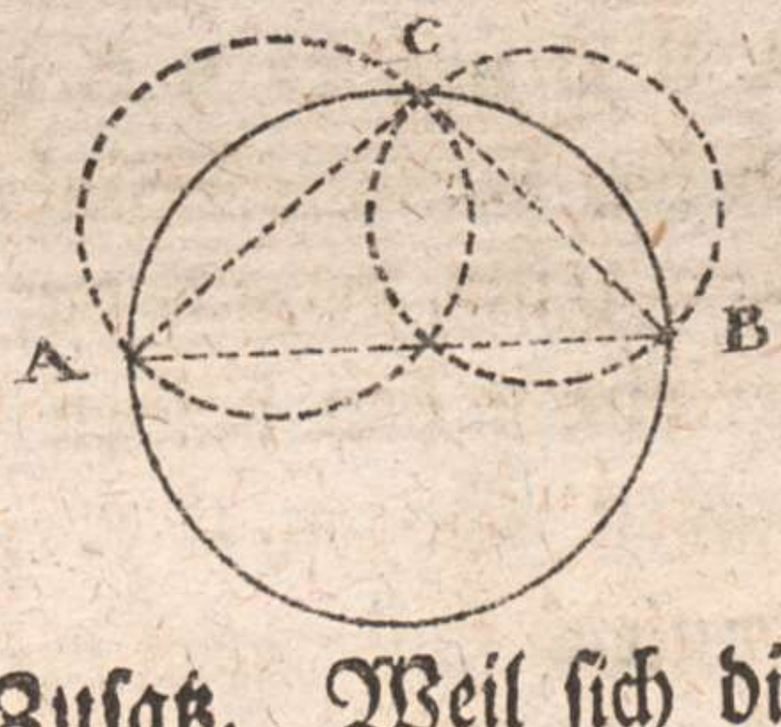
254. **Zusatz.** Aehnliche Kreisflächen verhalten sich also wie die Quadrate ihrer Halbmesser oder Durchmesser.



255. **Zusatz.** Theilt man in einem Dreyecke oder Vierecke die Seiten in zwey gleiche Theile, und verbindet sie mit Linien; so erhält man vier gleiche Dreyecke oder Vierecke, wo-

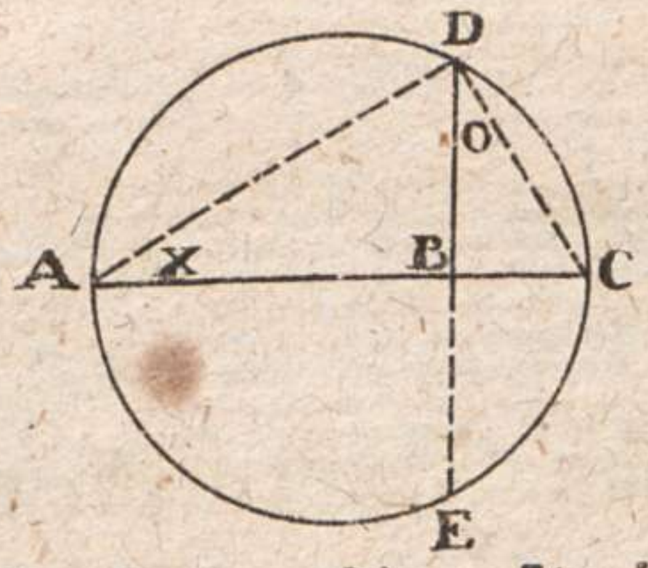
durch man sieht, daß sich die Flächeninhalte, wie die Quadratzahlen ihrer ähnlich liegenden Seiten verhalten.

256. Zusatz. Macht man einen Kreis A, dessen Halbmesser noch so groß ist, als ein anderer B, so ist der Umkreis noch so groß, und der Flächeninhalt vier Mahl so groß als B; weil die Linien im einfachen, die Flächeninhalte aber im vierfachen Verhältnisse, das ist, wie die Quadratzahlen mit einander stehen.



257. Zusatz. Weil sich die Kreisflächen wie die Quadrate ihrer Halb- oder Durchmesser verhalten; so können sie eben so wie die Quadrate Nro. 197, 198, u. 199 verwandelt, verdoppelt, halbirt, zusammen addirt, und von einander abgezogen werden. Es ist also die Kreisfläche von dem Durchmesser A B eben so groß, als die des Durchmessers A C, und C B zusammen genommen. Ist A C = C B, so sind auch ihre Flä

chen halb so groß, als die aus A B. Aehnlich regelmäßige Vielecke, und selbst ähnlich unregelmäßige können eben so behandelt werden, wenn man auf obige Art ihre ähnlich liegenden Seiten sucht.



258. **Lehrsatz.** So oft in einem Kreise eine senkrechte Linie D B auf den Durchmesser A C herunter gelassen wird; so ist diese die mittlere Proportionallinie zwischen A B und B C.

Beweis. Zieht man A D und D C, so sind die Dreyecke A B D und D B C einander ähnlich, weil beyde bey B rechte Winkel haben, und der Winkel X = O ist; denn X hat als ein Winkel an der Peripherie den halben Bogen D C, und O den halben Bogen C E zum Maaße, welche einander gleich sind; weil die Sehne senkrecht auf den Durchmesser herunter gelassen wurde, und dieser die Sehne und den Bogen in zwey gleiche Theile zertheilt. Da also zwey Winkel in einem Dreyecke gleich sind zweyen Winkeln im andern; so ist auch der dritte als der Rest von 180° gleich dem dritten, und die Dreyecke einander ähnlich. Es verhält sich also A B : D B = D B : B C. Sucht man die Produkte der äuß-

ern und innern zwey Glieder; so ist A B multiplizirt mit B C, gleich B D multiplizirt mit B D oder mit sich selbst. Es gibt also das Erste ein länglichtes Viereck, und das Zweyte ein Quadrat, welche vollkommen einander gleich sind.

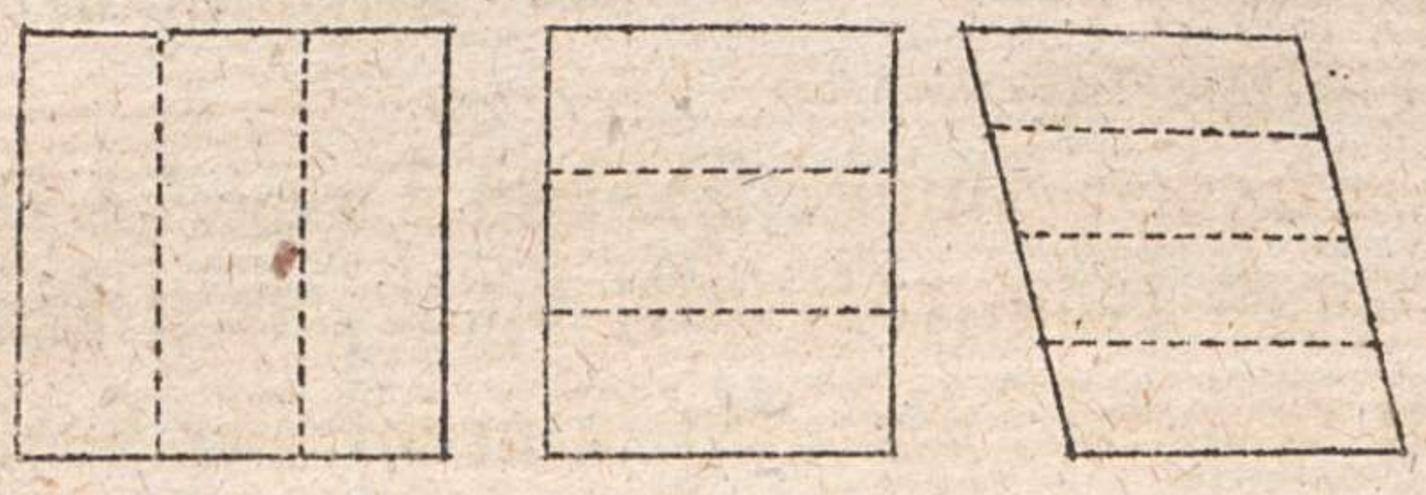
Hierin liegt der Grund zu der Verwandlung S. 106. Nro. 196. eines Parallellograms in ein Quadrat.

259. **Zusatz.** Da das Dreyeck A D C bey D einen rechten Winkel bildet, weil seine beyden Schenkel auf dem Durchmesser stehen; so gilt der obige Satz auch **für jeden Perpendikel, welcher, in was immer für einem rechtwinklichten Dreyecke, aus der Spitze des rechten Winkels auf die Hypothenuse herunter gelassen wird.**

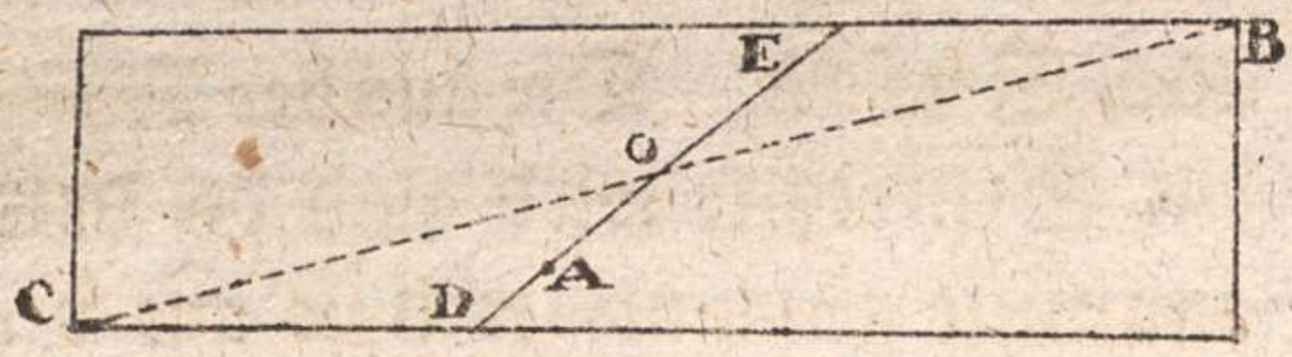
260. **Zusatz.** Die aus der Spitze herabgelassene Senkrechte wird auch die **dritte Proportionallinie** genannt, weil sie mit den beyden Theilen des Durchmessers A B und B C im Verhältnisse steht. Sucht man also zu zwey gegebenen Linien die dritte Proportionallinie, so werden diese beyden in eine Linie zusammen gesetzt, aus ihrer Mitte ein halber Kreisbogen beschrieben, und auf ihren Zusammenstossungs-Punkte eine Senkrechte bis an die Kreislinie gezogen, welche die mittlere Proportionallinie zwischen beyden ausmacht.

Von der Vertheilung der Flächen.

261. **Aufgabe. Quadrate, länglichte Vierecke, und Rauten in gleiche Theile zu zertheilen.**



Man theile zwey gegenüberstehende Seiten in gleiche Theile, und verbinde die Theilungs-Punkte mit geraden Linien, so entstehen durchaus gleiche Flächen.



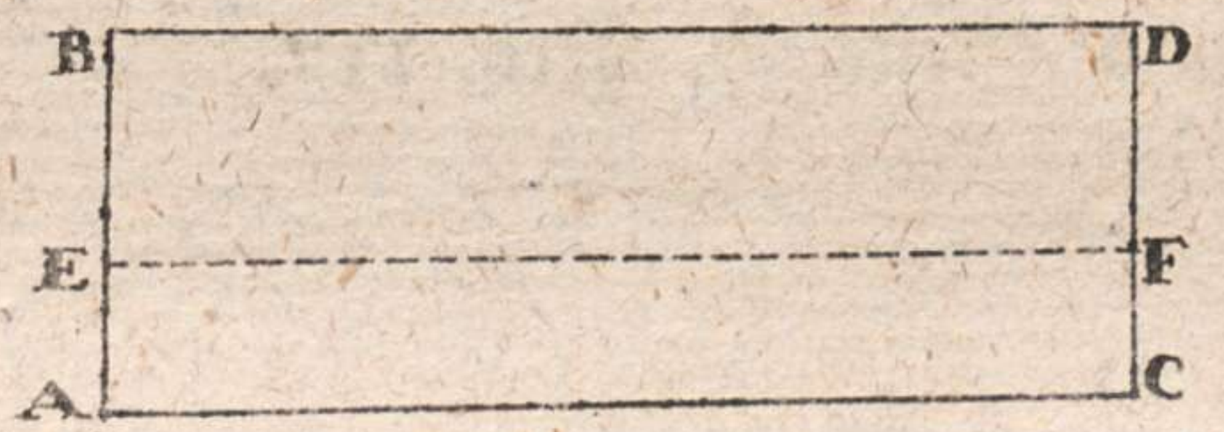
262. **Aufgabe. Ein Parallellogram so in zwey Theile zu zertheilen, daß die Theilungslinie einen gewissen Punkt A durchschneide.**

Man ziehe die Diagonallinie B C, theile sie bey O in zwey gleiche Theile, und ziehe durch den Punkt A, und O eine gerade Linie D E; so ist diese nach Seite 54 Nro. 144. die Theilungs-Linie.

263. Aufgabe. Ein Paralleltrapez in gleiche Theile zu zertheilen.

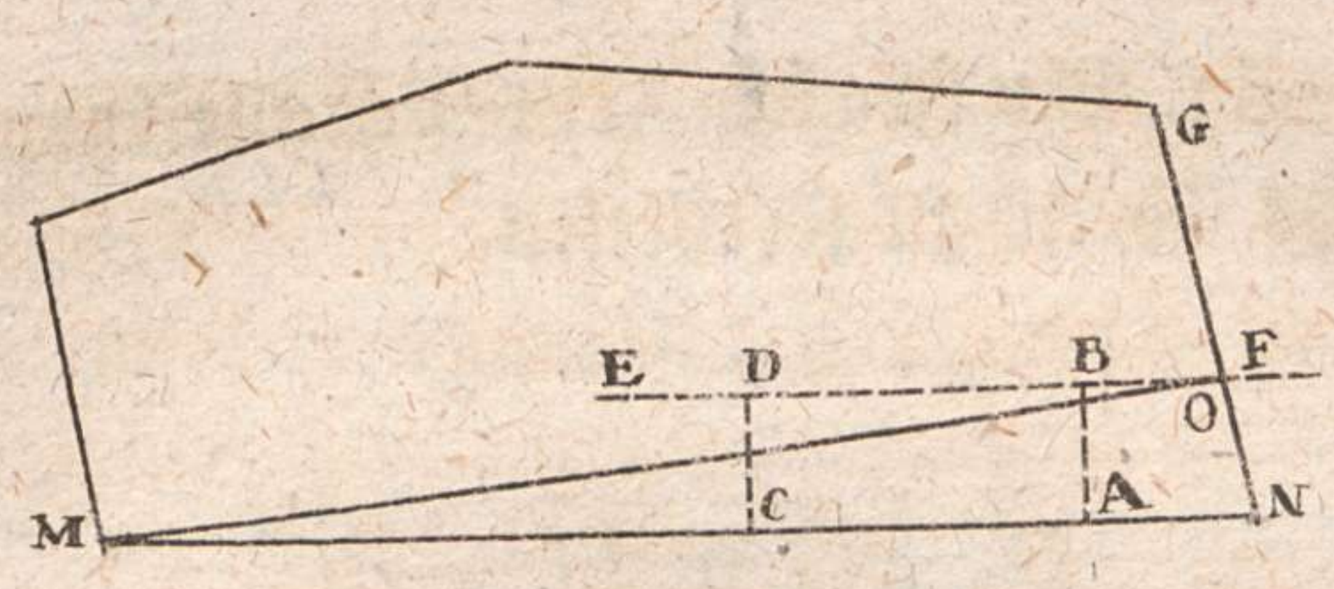
Man theile jede der parallelen Seiten in die verlangten gleichen Theile, und verbinde die Theilungspunkte mit Linien; so erhält man auch hier gleiche Flächeninhalte.

264. Aufgabe. Von einem Parallelograme eine gewisse Anzahl von Quadratschuhen abzuschneiden.

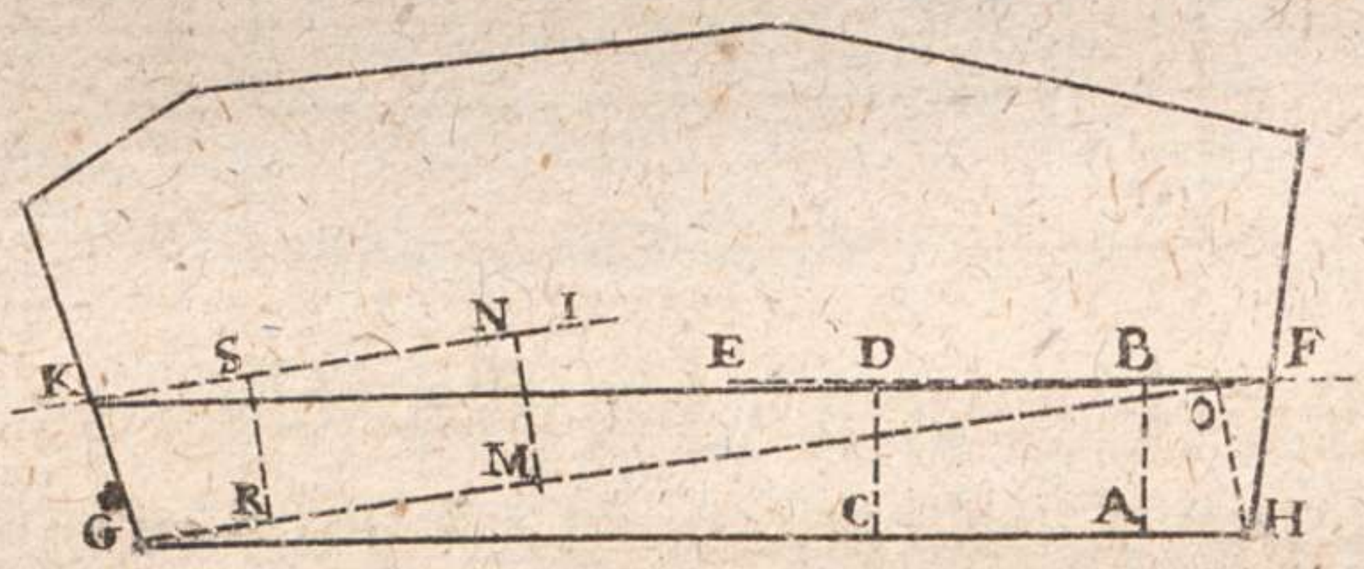


Man dividire mit der Grundlinie in die Anzahl von Quadratschuhen, welche man abschneiden will; so erhält man nach Seite 131 Nro. 231. die Höhe des abzuschneidenden Stückes, welches man auf A B und C D tragen und die Theilungslinie E F ziehen kann.

265. Aufgabe. Eine gewisse Anzahl von Quadratschuhen unter der Gestalt eines Dreyeckes abzuschneiden.



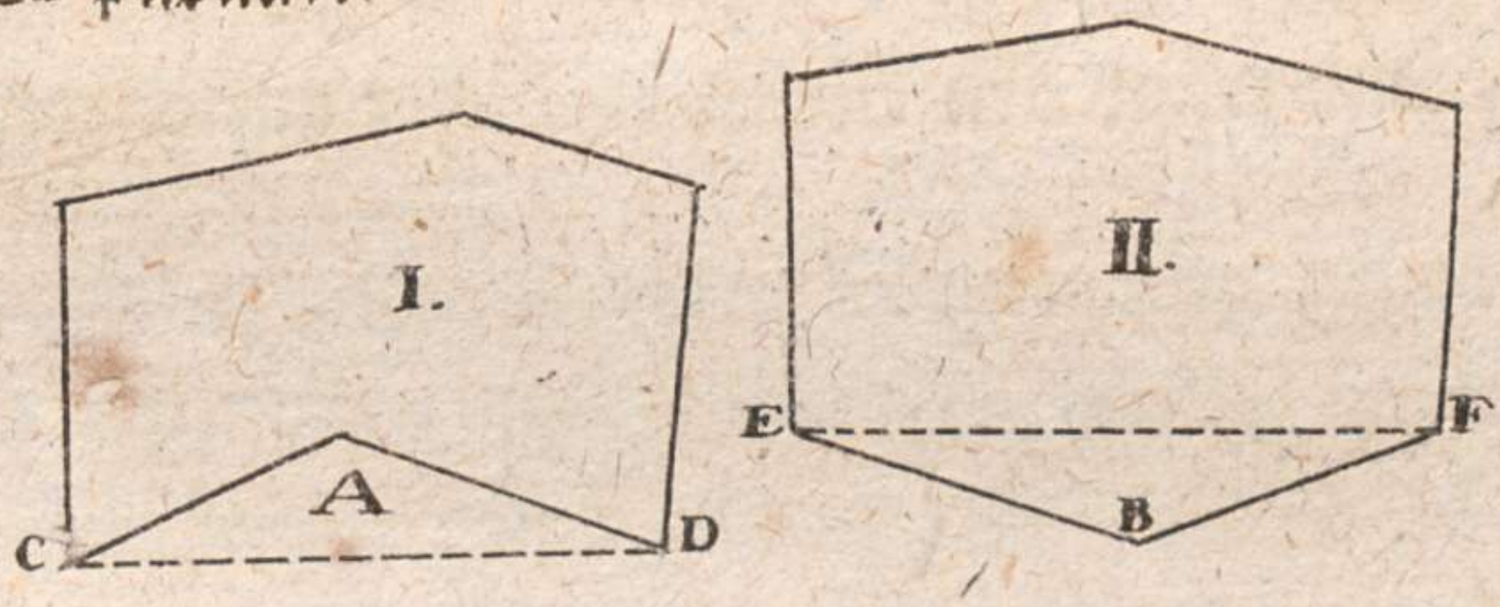
Man dividire mit der halben Grundlinie in die verlangte Anzahl von Quadratschuhen; so erhält man die Höhe des abzuschneidenden Dreyeckes. Diese Höhe setze man mit zwey Perpendikeln A B, und C D auf die Grundlinie M N, ziehe die Parallellinie E F; wo diese die Linie G N durchschneidet, zieht man die Theilungslinie O M, und das Dreyeck M N O wird den verlangten Flächeninhalt haben. Die Ursache dieses Verfahrens liegt in Seite 131. Nro. 231. und Seite 37. Nro. 117.



266. **Aufgabe. Von einem unregelmäßigen Vielecke eine gewisse Anzahl von Quadratschuhen so abzuschneiden, daß die Theilungslinie mit der Grundlinie beynahe parallel ist.**

Man dividire mit der ganzen Grundlinie in die gegebene Anzahl von Quadratschuhen,

so erhält man die Höhe eines Parallellograms, welches man unter der Gestalt zweyer Dreyecke auf folgende Art aufträgt. Man setzt die gefundene Höhe mit zwey Perpendikeln A B und C D auf G H, und zieht die Linie E F; aus dem Durchschnittspunkte F, zieht man F G; so hat man die Hälfte des Parallellograms. Man nimmt dann die Höhe des Dreyecks F G H, nähmlich H O, und trägt sie mit zwey Senkrechten M N und R S auf G F; zieht I K und aus dem Durchschnittspunkte K, die Linie K F: so ist diese die Theilungslinie, und beynahe mit G H parallel.



267. Aufgabe. Einen Theil von einem Vielecke abzuschneiden, das einen Winkel einwärts oder auswärts hat.

Man rechne das Dreyeck A Fig. I zuvor aus, addire seinen Flächeninhalt zu der verlangten Anzahl von Quadratschuhen, und schneide die Summe beyder Theile auf der Linie C D nach der oben angezeigten Art ab.

Hat das Vieleck einen Winkel auswärts wie B, Fig. II. so wird das Dreyeck E F B eben-

falls ausgerechnet, und von der abzuschneidenden Anzahl von Quadratschuhen abgezogen, der Rest aber auf der Linie E F aufgetragen.

Merkt man, daß die Theilungslinie über einen Winkel A hinaufsteigen werde, so zieht man aus diesem eine Linie A B mit der Grundlinie parallel; berechnet das abgeschnittene Stück besonders; nimmt die Linie A B zur Grundlinie, und trägt den Rest von dieser aufwärts.

268. **Aufgabe. Eine jede Figur in gleiche oder ungleiche Theile zu zertheilen.**

Es soll das Vieleck A E F G B, welches 84000 □′ in sich enthält, in drey gleiche Theile getheilt werden; so erhält ein Theil 28000 □′. Man schneide also auf der Grundlinie A B einen Theil ab, welcher bis C D gehen soll; nehme C D zur Grundlinie, und schneide den zweyten Theil ab:

so wird der dritte übrig bleiben, welchen man zur Probe ausrechnen und sehen kann, ob die 28000$^{-}/$ vorhanden sind oder nicht.

Man kann auch die ganze Figur gleich nach dem Augenmaaße in 3 Theile zertheilen, einen jeden Theil besonders ausrechnen, und das Fehlende durch ein Dreyeck hinzu thun, oder das Ueberflüßige durch ein solches hinweg schneiden.

Soll ein Grundstück in ungleiche Theile getheilt werden; so fragt es sich, den wievielten Theil des Ganzen ein jeder bekommen soll; z. B: Es sollen 86450$^{-}/$ in drey Theile getheilt werden, wovon der Erste $\frac{1}{3}$, der Zweyte $\frac{1}{4}$, und der Dritte $\frac{1}{5}$ bekommen soll. Hier müssen die Brüche zuvor unter einerley Benennung gebracht, und zusammen addirt werden, wo sie sich in $\frac{47}{60}$ verwandeln. Da nun $\frac{47}{60}$ das ganze Stück von 86450$^{-}/$ erhalten, so sucht man, wie viel $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{5}$ bekömmt, welches nach der Gesellschafts-Rechnung leicht gefunden, und jedem der gehörige Antheil, auf eine der oben beschriebenen Arten, abgeschnitten wird.

Ist die Figur auf dem Papiere richtig abgetheilt, und man will die Gränzlinien der Theile auf dem Felde ausstecken; so suche man die Länge A C, und B D auf dem verjüngten Maaßstabe; lasse auf dem Felde von A nach C, und von B nach D eben so viele Schuhe abmessen,

als man auf dem Maßstabe gefunden hat, und schlage auf den Punkten C und D die Markpfähle. Ist die Linie C D sehr lange; so können auch von C nach D in gerader Richtung ein Paar Pfähle geschlagen, oder einsweilen kleine Gruben geöffnet werden. Auf die nähmliche Art verfährt man auch mit den übrigen Theilungslinien.

269. Anmerkung. Außer diesen Aufgaben von Vertheilungen gibt es noch verschiedene Arten derselben, die man hier anzuführen für unnöthig findet, weil man die vorkommenden Fälle durch die bereits angezeigten, mit hinlänglicher Genauigkeit aufzulösen im Stande ist.

Von der Ausziehung der Quadratwurzel.

270. Erklärung. Die Quadratwurzel aus einer Zahl ausziehen, heißt: diejenige Zahl ausfindig machen, welche durch sich selbst multiplizirt, die gegebene Zahl hervorbringt. So ist die Quadratwurzel von 36 die Zahl 6, weil $6 \times 6 = 36$ ist. Diejenigen Zahlen, wovon sich die Wurzel nicht ohne Rest ausziehen läßt, sind keine vollkommenen Quadratzahlen, wie 12, 15, 20 ꝛc.

Das Quadrat einer einfachen Zahl kann aus nicht mehr als zwey Ziffern bestehen, weil 10 als die erste Zahl von zwey Ziffern schon 100 zu ihrem Quadrate hat. Eben so kann das Quadrat einer Zahl von zwey Ziffern nicht mehr als vier Ziffer in sich enthalten, weil 100 schon 10000 zu ihrem Quadrate gibt. Ueberhaupt hält keine Quadratzahl mehr als die doppelte Anzahl von Ziffern ihrer Wurzelzahl in sich.

271. Wenn man was immer für eine Zahl, z. B. 5 in zwey Theile, in 3 und 2 zertheilt, so wird das Quadrat dieser Zahl aus folgenden Produkten bestehen: erstens, aus dem Quadrate der ersten Zahl 3; zweytens, aus dem Quadrate der zweyten Zahl 2; und drittens aus dem doppelten Produkte, welches entsteht, wenn man die erste Zahl mit der zweyten multiplizirt. Es ist also das Quadrat von $3 = 9$; das Quadrat von $2 = 4$; und die Multiplikation von $3 \times 2 = 6$. Dieses doppelt genommen $6 + 6 = 12$; folglich $9 + 4 + 12 = 25$, gleich dem Quadrate von 5. Aus dieser Zergliederung entstehen die folgenden bey der Ausziehung der Quadratwurzel nöthigen Regeln, welche wir gleich in einem Beyspiele angewandt, zeigen wollen.

Aufgabe. Die Quadratwurzel von der Zahl 178929 auszuziehen.

17,89,29 | 423
16

-189
82
164

-2529
843
2529

Man theile die Ziffer von der Rechten zur Linken paarweise ab, bis auf das Erste, welches bisweilen allein zu stehen kömmt, und suche die Quadrat-Wurzel von der ersten Abtheilung, 17, oder der nächst kleineren Quadratzahl 16, welche 4 ist. Diese setze man als einen Quotienten hinter den senkrechten Strich; das Quadrat davon aber, nähmlich 16 unter die erste Abtheilung 17, und subtrahiere, wie bey der Division. Zu der übrig gebliebenen Zahl setze die nächste Atheilung 89 herunter, so erhält man 189. Als Divisor wird ferners das Doppelte von 4, nähmlich 8 gesetzt; jedoch alle Mahl so, daß das letzte Ziffer frey bleibt. Dividirt man 8 in 18, so ist der Quotient 2, welcher wieder zu 4 hin kömmt. Die nähmliche Zahl 2 setze man auch zum Divisor 8, und multiplizire 82 durch den Quotienten 2; so erhält man 164, welches wie bey der Division von 189 abgezogen wird. Zum Rest wird wieder 29 herab gesetzt, so entsteht

2529.

2529. Um den Divisor zu finden, verfährt man wie bey der vorhergehenden zweyten Klasse. Man nimmt nähmlich 42 doppelt, das ist 84, und setzt sie so, daß wieder das letzte Ziffer 9 frey bleibt; dividirt 8 in 25: so entsteht der Quotient 3, welcher sowohl zu den bereits gefundenen Quotienten, als auch unter das Ziffer 9 gesetzt wird. Multiplizirt man wieder den ganzen Divisor 843 mit 3; so erhält man 2529, welches von der obern Zahl abgezogen keinen Rest gibt. Der erhaltene Quotient 423 ist die gesuchte Wurzel. Wären noch mehrere Klassen vorhanden, so müßte immer auf die nähmliche Art fortgefahren werden. Hieraus sieht man, daß nur bey der ersten Klasse die Wurzelzahl gesucht, und ihr Quadrat von der obern Klasse abgezogen, in der Folge aber alle Mahl der doppelte Quotient zum Divisor genommen werden müsse.

272. Die Ursache dieses Verfahrens liegt in dem, was S. 159. Nro. 271. ist gesagt worden. Es ist nähmlich in der ersten Zahl 17 das Quadrat des ersten Theils der Wurzel enthalten, sammt dem Reste 1. Die Wurzel dieses Quadrats macht also den ersten Theil der zu suchenden Wurzel aus. In dem Reste, und der dazu gesetzten Zahl muß noch das Quadrat des zweyten Theils, und das doppelte Produkt aus

dem ersten in den zweyten Theil, verborgen liegen. Weil aber das Quadrat des zweyten Theiles in dem letzten Ziffer steckt; so muß das doppelte Produkt in den ersten zweyen enthalten seyn. Dividirt man also die ersten zwey Ziffer durch den doppelten ersten Theil, so gibt der Quotient den zweyten Theil der Wurzel; weil durch die Division das Produkt in die nähmlichen Faktoren zerlegt wird, aus welchen es durch die Multiplikation entstanden ist.

Fügt es sich, daß eine Zahl von der andern nicht kann abgezogen werden; so ist dieß ein Zeichen, daß man den Quotienten zu groß angenommen habe.

Ist das doppelte Produkt, oder der Divisor größer als die Zahl, welche dividirt werden soll; so muß eine Nulle zum Quotienten gesetzt, und die nächste Klasse oder Abtheilung herunter genommen werden, wie man aus folgendem Beyspiele sehen kann:

```
4,09,32 | 202
 -4     |
--------|
 -0932
   402
   804
--------
   128
```

273. Bleibt nach geschehener letzten Abziehung ein Rest übrig; so läßt sich die Wurzel nicht vollkommen ausziehen. Man kann aber dem Reste

zwey Nullen beysetzen, und den Werth desselben in Dezimalen suchen, welches so oft wiederholt wird, als man es nöthig findet. Die erhaltenen Dezimalen werden von den übrigen Zahlen durch einen kleinen Strich abgesondert. Wir wollen hier das obige Beyspiel fortsetzen:

```
4,09,32 | 202,316
4       |
--------|
-0932
  402
  804
-------
- 12800
  4043
  12129
-------
--07100
  40461
-------
    2063900
     404626
    2427756
-------
-236144
```

Die erste Dezimalzahl bedeutet die Zehntheile, die zweyte die Hunderttheile, und die dritte die Tausendtheile eines Ganzen. Ist in der gegebenen Quadratzahl von Quadratschuhen die Rede; so bedeutet die erste Dezimalzahl, zehntheilige Zolle; die zweyte, zehntheilige Linien, und die dritte, zehntheilige Punkte. Eine größere Genauigkeit wird selten nöthig seyn.

274. Soll aus einem Bruche die Quadratwurzel ausgezogen werden; so muß dieses sowohl bey dem Zähler als Nenner ins Besondere geschehen.

275. Die Probe, ob die Wurzel richtig ausgezogen ist, wird gemacht, wenn man das erhaltene Produkt mit sich selbst multiplizirt, und den übrig gebliebenen Rest dazu addirt, wo die gegebene Quadratzahl wieder hervorkömmt.

276. Hier noch ein Paar Beyspiele zur Uebung und Anwendung:

Beyspiel. Die Grundlinie eines rechtwinklichten Dreyeckes halte 30 Schuhe, die Höhe 24, wie lang wird die Hypothenuse seyn?

Weil das Quadrat der Hypothenuse eben so groß ist, als das Quadrat der beyden Katheten zusammen genommen; so erhebt man 30 und 24 zu Quadraten, und addirt sie, wodurch man das Quadrat der Hypothenuse bekömmt, aus welchem, um die wirkliche Länge dieser Linie zu erhalten, die Quadratwurzel ausgezogen wird.

Es gibt also 30, das Quadrat 900, und 24, das Quadrat 576; beyde zusammen addirt 1476^{-1}, wovon man die Wurzel auf folgende Art auszieht:

14,76	38,'4",1"' Länge der Hypo=
9	thenuse.

-576
68
544

-3200
764
3056

-14400
7681

6719

Beyspiel. Der Durchschnitt einer Kreis=förmigen Röhre halte im Lichten 16-" 45-"' Dezimalmaaß, wie groß wird der Durchmesser seyn?

Weil nach Seite 129. Nro. 228. die Kreisfläche aus dem Quadrat des Durchmessers multiplizirt mit der Zahl 314 dividirt durch 4 und 100 besteht; so muß, um das Quadrat des Durchmessers zu erhalten, die gegebene Fläche nach Seite 132. Nro. 233. durch 314 dividirt und mit 4 und 100 multiplizirt werden. Damit man also den Durchmesser sehr genau erhalte, so setze man zur gegebenen Zahl noch zwey Nullen hinzu, wodurch man Punkte bekömmt, nähmlich 164500-''''. Diese durch 314 dividirt geben 523, und durch 4 und 100 multiplizirt 209200-''''; oder das Quadrat des Durchmessers, woraus, um den eigentlichen Durchmesser zu finden, die Quadratwurzel auf folgende Art ausgezogen wird:

20,92,00 | 4''15'''7''''. Länge des
16 | Durchmessers,

-492
85
425

-6700
907
6349

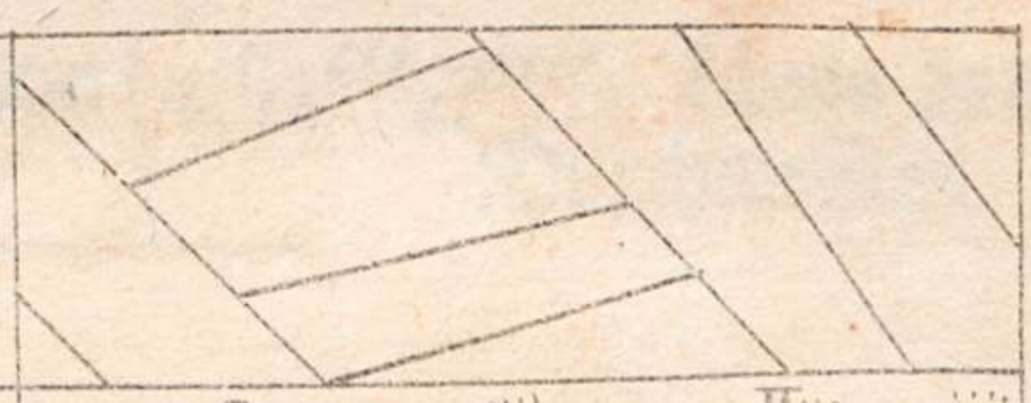
-351

Von der Zeichnung geometrischer Plane.

277. Der geometrische Plan ist die Aufzeichnung einer Fläche mit seinen Zugehörungen nach dem verjüngten Maaßstabe. Da es bey der Ausmessung der Flächen nur auf die Länge und Breite ankömmt; so werden auch die Gebäude und andere körperliche Gegenstände nur nach ihrer Grundfläche dargestellt. Die beygesetzte Tabelle zeigt die Darstellung der verschiedenen Gegenstände, die in einem Plane vorkommen können. Der Anfänger soll sich in der Zeichnung derselben, so lange üben, bis er sich darin eine gewisse Fertigkeit erworben hat. Diejenigen, die in der Landschaftzeichnung nur einige Fortschritte gemacht haben, werden in der Planzeichnung keine Schwierigkeit finden.

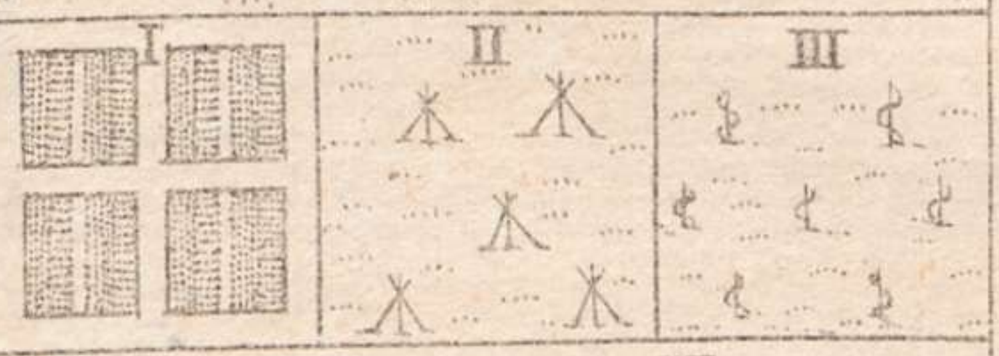
Karte Tafel 166.

Schichtung.

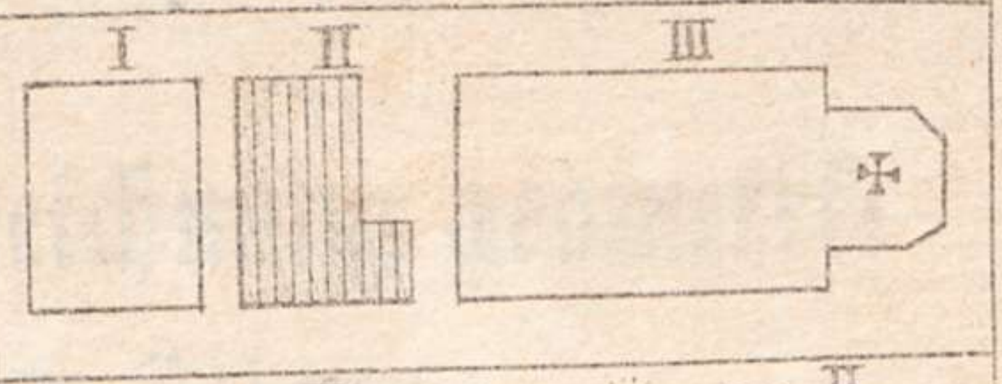


I Wiesen.
II Moor.

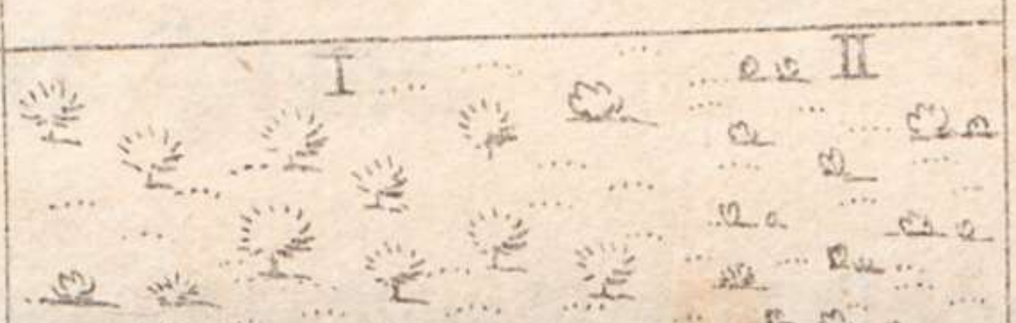
I Kohl
II Hanfland } Gemüse
III Reis



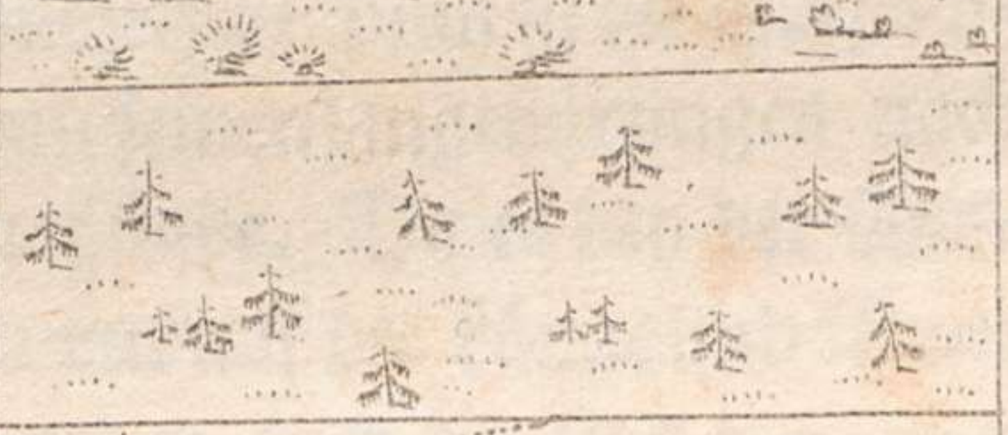
I Ackerland } Ge-
II Hülsenfrüchte } wächse.
III Weinbau.



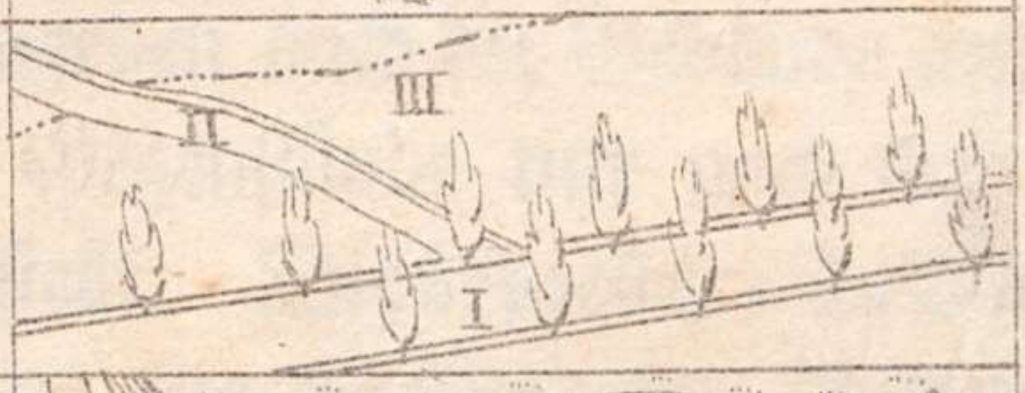
I Laubholz.
II Nadelholz.



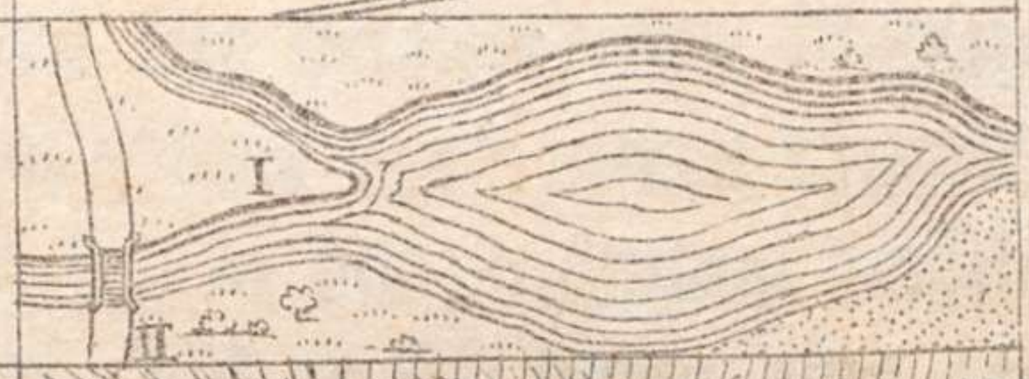
Nadelholz.

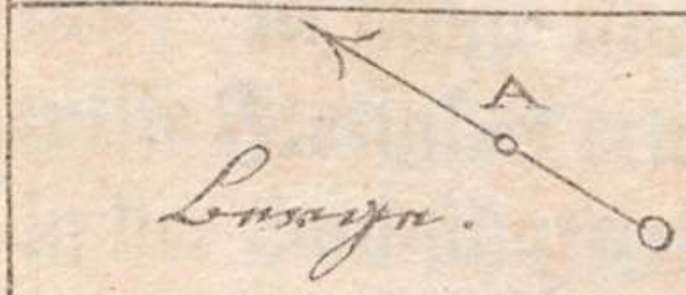


I Landstraßen.
II Eisenbahn.
III Flußbrücke.

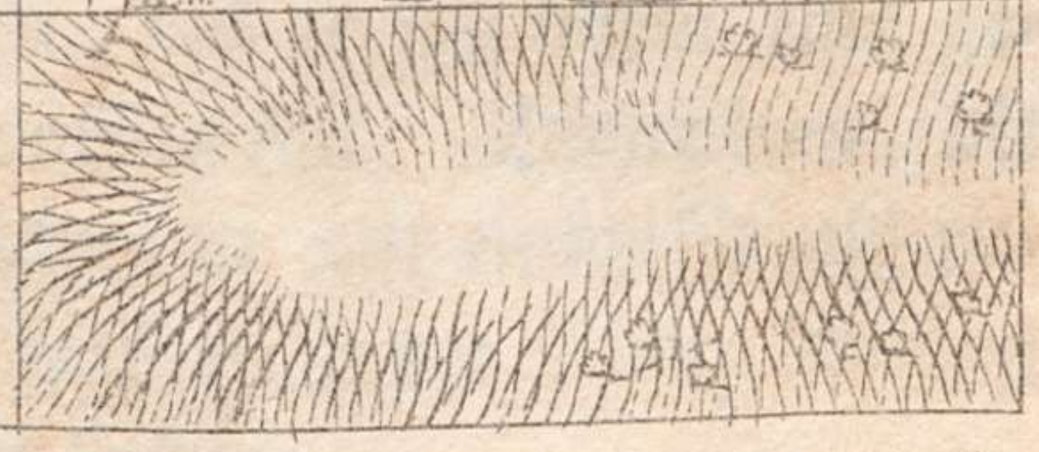


I Flüsse und Bäche.
II Brücken.





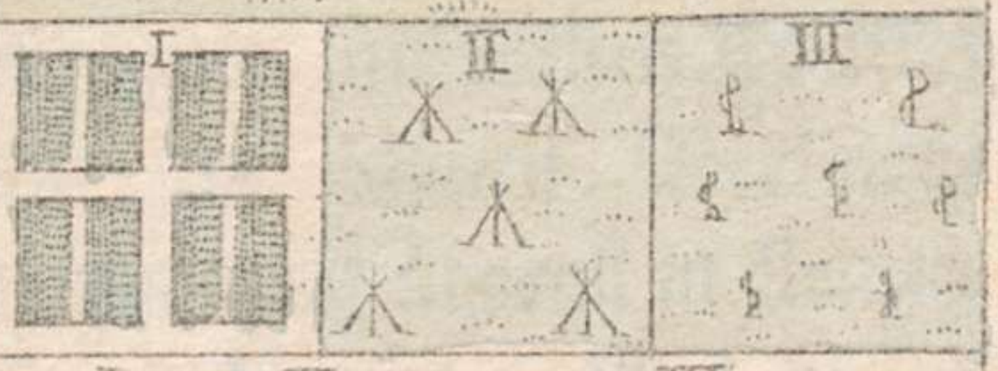
Lenzsyn.



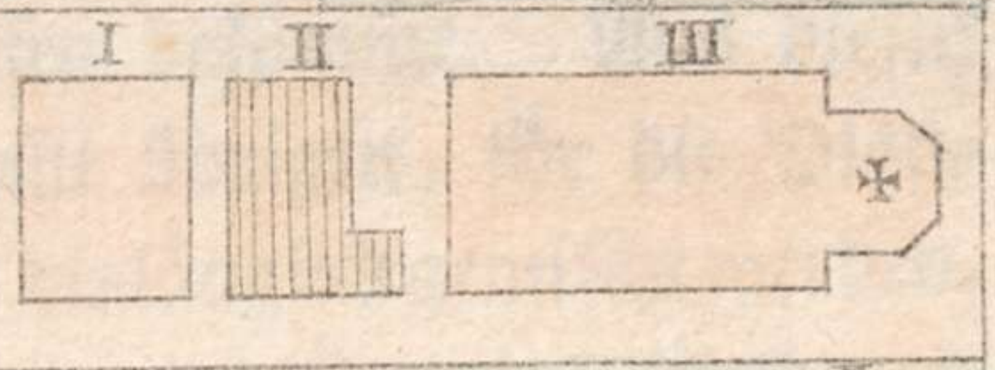
Schichten

I Alluvium
II Moor.

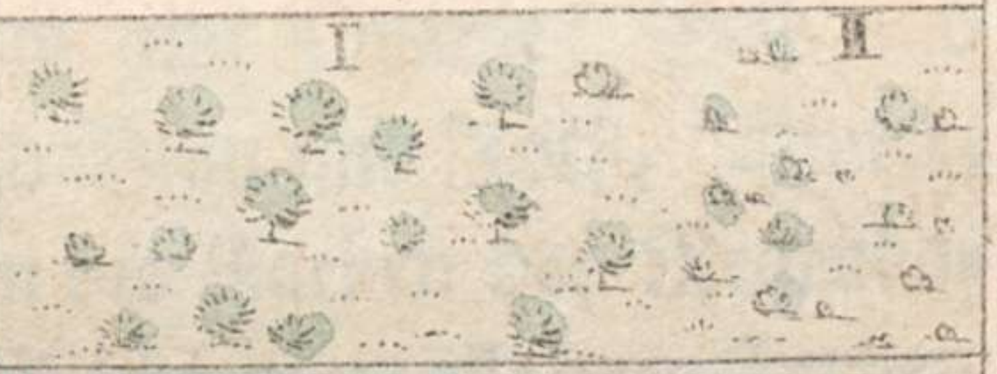
I Kohle
II Gypsum
III Salzen
} Gyps-
} steine.



I Steinsalzen
II Kalksteinen
III Dioritgesteine.
} Gebirgs-

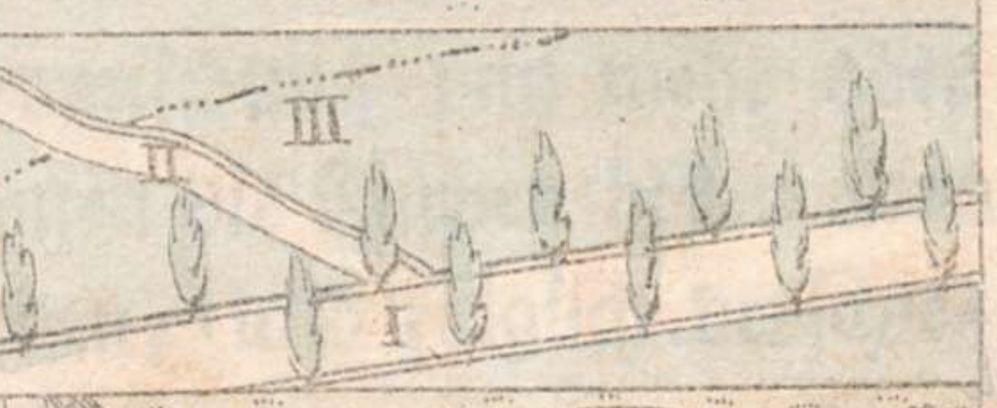


I Laubholz.
II Nadelholz.



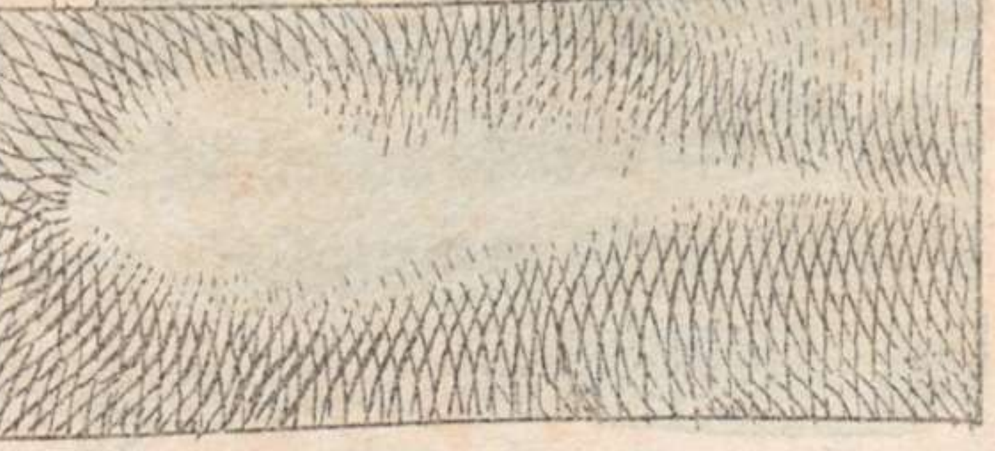
Nadelholz.

I Laubholz
II Nadelholz
III Gemischter Bestand.



I Flüsse und Seen
II Teiche.
III Sümpfe.

Ebenen.



Sind die Theile mit der Feder richtig gezeichnet; so kann man sie mit derjenigen Farbe überziehen, die sie in der Natur haben, wie die zweyte Tabelle zeigt. Die Farben, die man hierzu gebraucht, sind die drey Hauptfarben, als Gelb, Roth und Blau. Zur gelben Farbe nimmt man Gummigutt, zur rothen Karmin oder feinen Lak, und zur blauen Berlinerblau, welche man gegenwärtig überall in kleinen Stängelchen zu kaufen bekömmt. Aus diesen drey Farben können alle übrigen, für die Planzeichnung nöthigen, hinlänglich gemischt werden. Denn Gelb und Roth gibt Oranie; Gelb und Blau gibt Grün, und Blau und Roth, Violet, welche mit den obigen die Farben des Regenbogens ausmachen. Mischt man alle drey Farben zusammen; so erhält man eine dunkelgraue Farbe.

Durch die Beymischung von mehr oder weniger Wasser können die Farben heller oder dunkler gemacht werden, und folglich verschiedene Grade und Abstuffungen erhalten. Eben so erhält man auch von den gemischten Farben verschiedene Abarten, wenn man von einer Farbe mehr als von der andern beymischt. Denn gibt man der grünen Farbe mehr Blau als Gelb, so wird das Grüne ins Bläulichte oder Meergrüne fallen. Setzt man aber mehr Gelb zu, so erhält man eine gelblicht-grüne Farbe. Zum

Schattieren der Gegenstände bedient man sich des Tusches, welchen man mit mehr oder weniger Wasser vermengt, je nachdem man die Schatten stark oder schwach machen will.

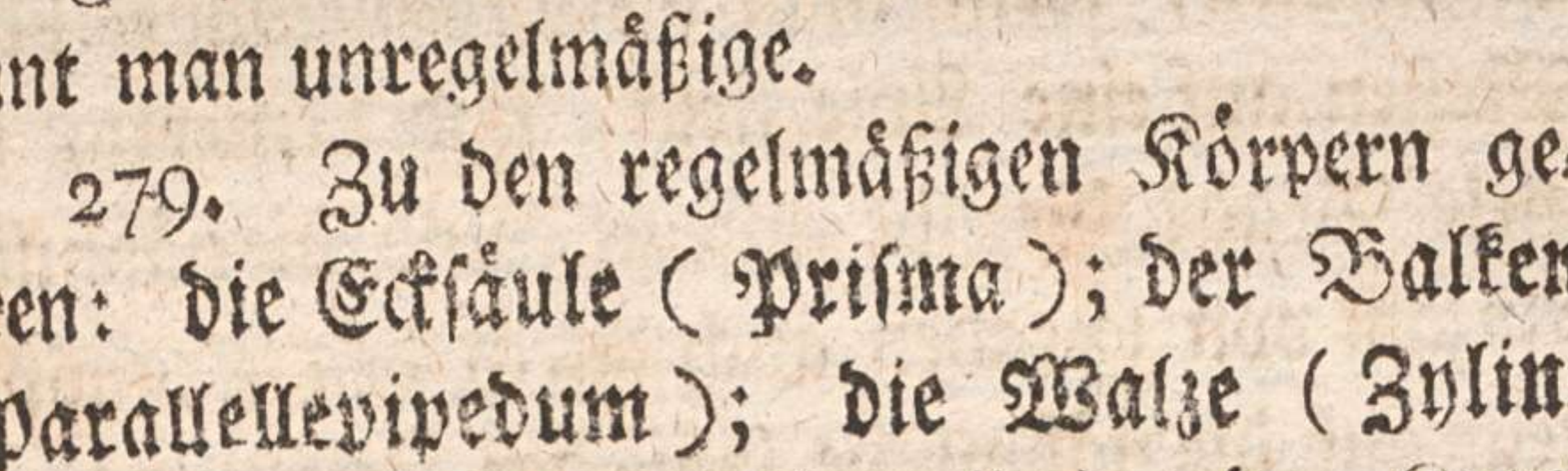
Die Pinsel, welche man zum Auftragen der Farben gebraucht, sind die sogenannten Haarpinsel, die, wenn sie auch etwas groß sind, sich doch alle Mahl in eine feine Spitze enden, daher die gar kleinen zu nichts dienen. Will man machen, daß eine Farbe oder der Schatten sich nach und nach verliere, wie dieses bey runden Körpern nöthig ist; so kann man zwey Pinsel in einen Stiel verbinden, in den einen die Farbe oder Tusch, und in den andern reines Wasser nehmen. Man legt dann die Tusch-Farbe ziemlich naß an, wendet den Pinsel um, berührt mit der äußersten Spitze des Wasser-Pinsels den äußersten Rand der Farbe, und fährt so lange auf und ab, bis die Farbe sich sanft verliert. Es ist aber dabey wohl Acht zu haben, daß man weder zu viele Farbe, noch zu vieles Wasser in den Pinsel nehme, welches die Uebung zeigen muß. Will man große Flächen mit einer einzigen Farbe überstreichen; so muß diese wohl mit Wasser verdünnt, und von einer Ecke des Umrisses angefangen, bis an das Ende, ohne sie trocknen zu lassen, fortgezogen werden. Denn wird die Farbe trocken; so macht sie Flecken; daher dicke Farben sich nicht wohl gleich anstrei-

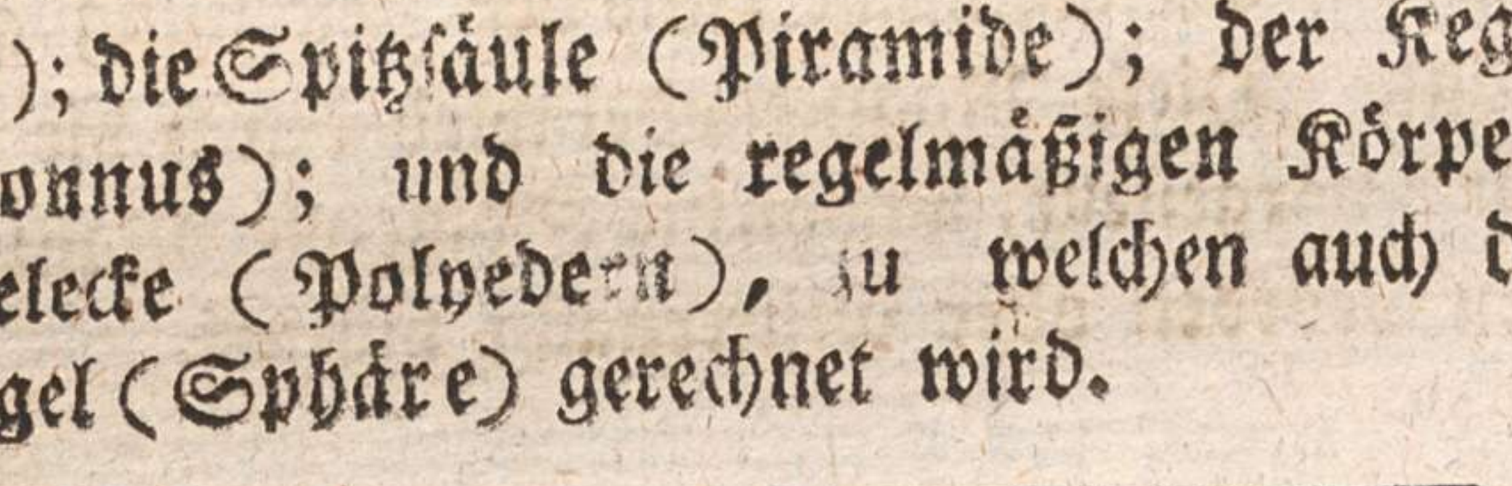
chen lassen, und zu grossen Flächen unbrauchbar sind. Ueberhaupt soll in der Planzeichnung Alles mit ganz leichten Farben angezeigt seyn, weil sonst die Plane ein häßliches Aussehen erhalten. Ist die ganze Zeichnung ausgefertigt; so wird am Ende der verjüngte Maaßstab beygesetzt, und auf einem leeren Platze des Papieres die nöthigen Erklärungen beygefügt. Man kann auch die Weltgegenden in die Zeichnung aufnehmen, wenn man die Magnetnadel beym Messen auf eine Linie stellt, und bemerkt, wie viele Grade dieselbe anzeigt, und die nähmliche Anzahl von Graden auch durch den Transporteur auf die nähmliche Linie der Zeichnung aufträgt. Diese Magnetnadel wird durch die Figur A vorgestellt, wovon die Spitze alle Mahl gegen Norden oder Mitternacht hinzielt.

Von den geometrischen Körpern, oder von der Stereometrie.

278. Erklärungen. Körper gibt es zweyerley, regelmäßige und unregelmäßige. Regelmäßig sind diejenigen, die von lauter regelmäßigen Flächen eingeschlossen sind; alle übrigen nennt man unregelmäßige.

279. Zu den regelmäßigen Körpern gehören: die Eckſäule (Prisma); der Balken (Parallelepipedum); die Walze (Zylinder); die Spitzſäule (Piramide); der Kegel (Konnus); und die regelmäßigen Körper-Vielecke (Polyedern), zu welchen auch die Kugel (Sphäre) gerechnet wird.

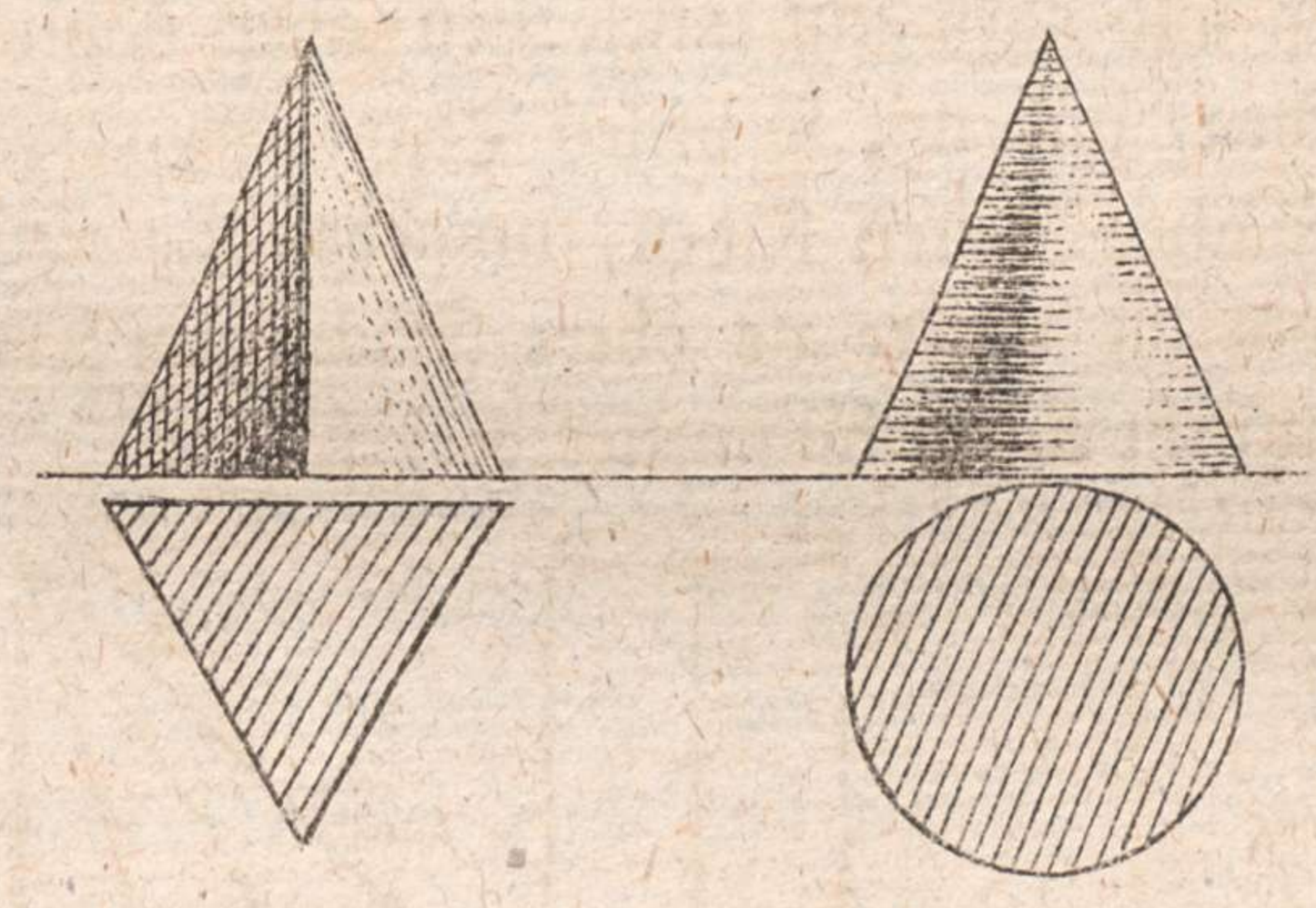




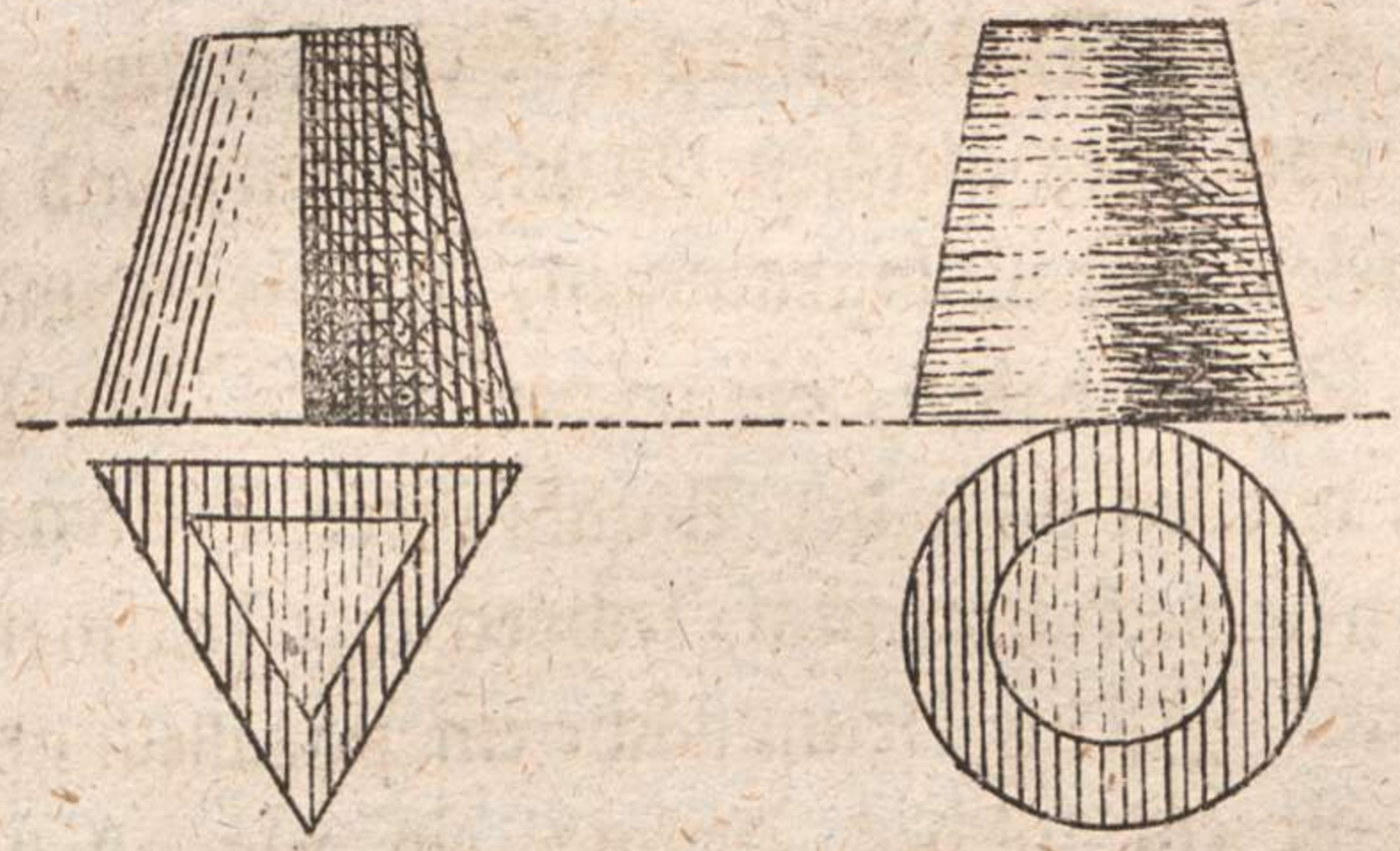
Grundflächen.

280. Diejenige Fläche, worauf ein Körper steht, wird die Grundfläche genannt.

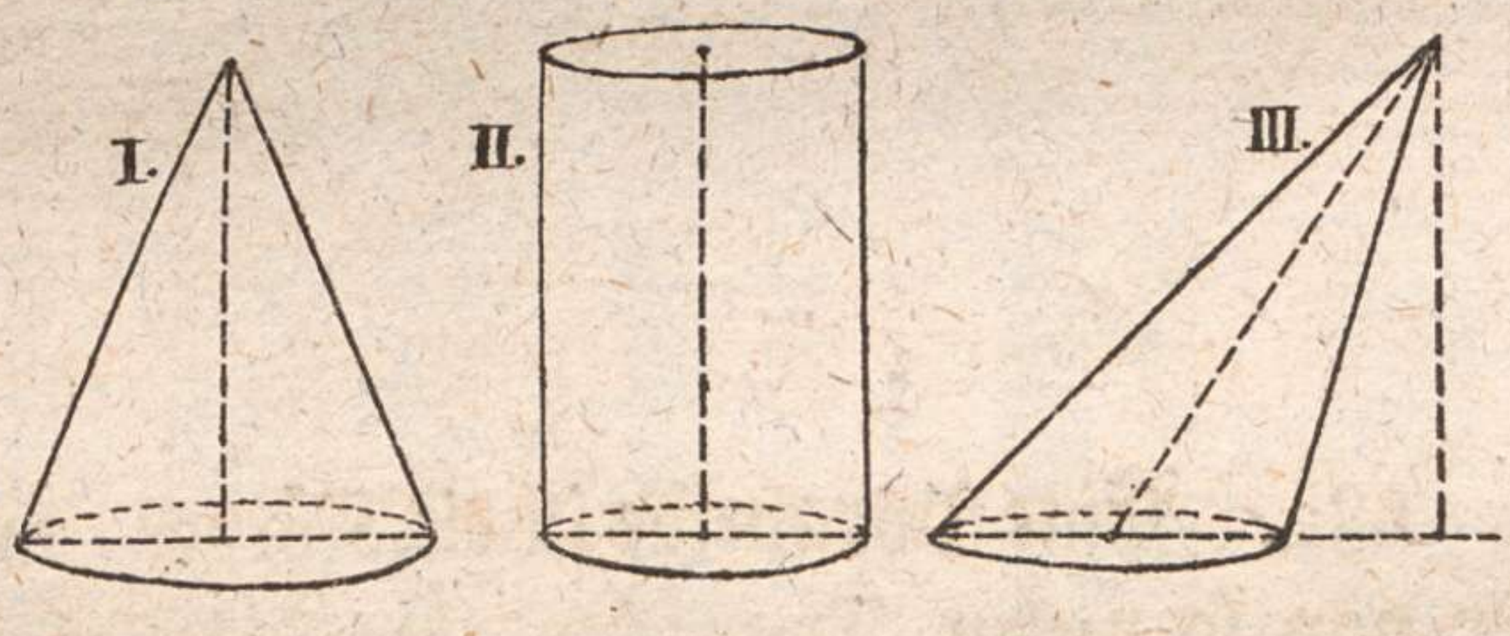
281. Das Prisma A ist ein Körper, welcher von zwey gleichen Grundflächen, und eben so vielen Parallellogrammen, als die Grundflächen Seiten haben, eingeschlossen ist. Die Prismen werden nach der Anzahl ihrer Seiten oder Ecken dreyeckichte, fünf- sechseckichte Prismen genannt. Ist die Grundfläche ein Parallellogram, so heißt ein solches Prisma ein Parallelepipedum B. Ist die Grundfläche ein Vieleck von unendlich vielen Seiten, oder was Eines ist, ein Kreis; so wird das Prisma zu einer Walze C.



282. Eine Pyramide ist ein Körper, welcher von so vielen Dreyecken eingeschlossen ist, als die Grundfläche Seiten hat. Die Pyramide ist drey- vier- fünfeckicht, je nachdem die Grundfläche ein Dreyeck, Viereck oder Fünfeck ist. Hat die Pyramide zur Grundfläche einen Kreis, so wird sie zum Kegel, welcher folglich als eine Pyramide von unendlich vielen Seiten betrachtet werden kann.



283 Hierher gehören noch die gestümmelte Pyramide und der gestümmelte Kegel. Die gestümmelte Pyramide ist ein Körper, welcher unten und oben mit ungleichen aber ähnlichen Flächen, und mit so vielen Trapetzen, als diese Flächen Seiten haben, umgeben ist. Wird sowohl die untere als obere Fläche zum Kreise, so entsteht ein gestümmelter Kegel.



284. Die Achse der Körper wird diejenige gerade Linie genannt, welche von der Spitze oder von dem Mittelpunkte der obern Fläche auf den Mittelpunkt der untern Fläche, durch den Körper geht. Fig. I.

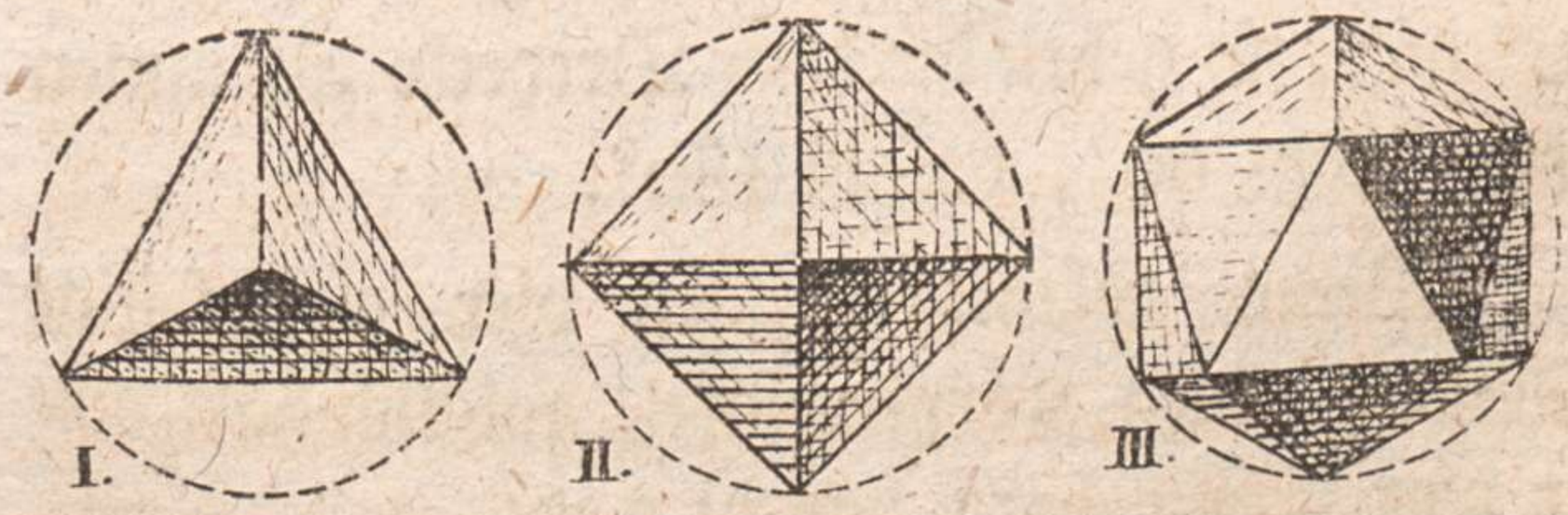
285. Ein senkrechter Körper ist derjenige, dessen Achse senkrecht auf der Grundlinie steht;

Fig. II. ein schiefer aber, dessen Achse schief auf der Grundfläche steht. Fig. III.

286. Die **Höhe der Körper** ist die senkrechte Linie, welche von dem obersten Punkte der Achse auf die Grundfläche gefällt wird. Bey senkrechten Körpern gibt die Achse zugleich die Höhe; bey schiefen aber fällt die Senkrechte über den untern Punkt der Achse hinaus, in welchem Falle dieser in gerader Richtung mit der Grundfläche so lange verlängert werden muß, bis er die Senkrechte schneidet. Fig. III.

287. Ein **Körperwinkel** ist derjenige, welcher von drey oder mehr Flächen eingeschlossen wird.

288. **Regelmäßige Körper-Vielecke** sind diejenigen, welche aus lauter ganz gleichen Flächen und Winkeln bestehen. Es gibt deren nur fünfe, als das Tetraedrum, das Oktaedrum, das Ikosaedrum, das Hexaedrum und das Dodekaedrum.

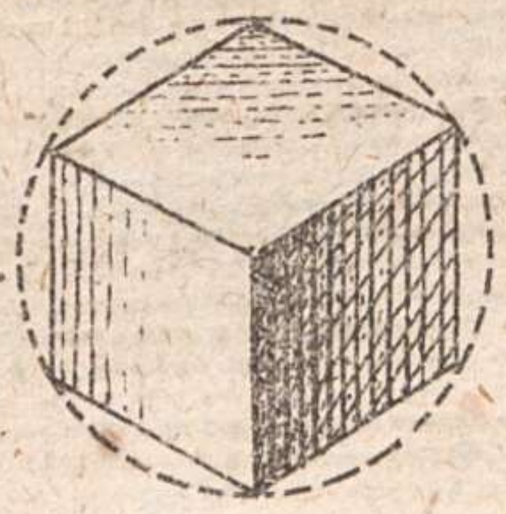


Ein **Tetraedrum** ist ein Körper, welcher von vier gleichen gleichseitigen Dreyecken umgeben ist. Fig. I.

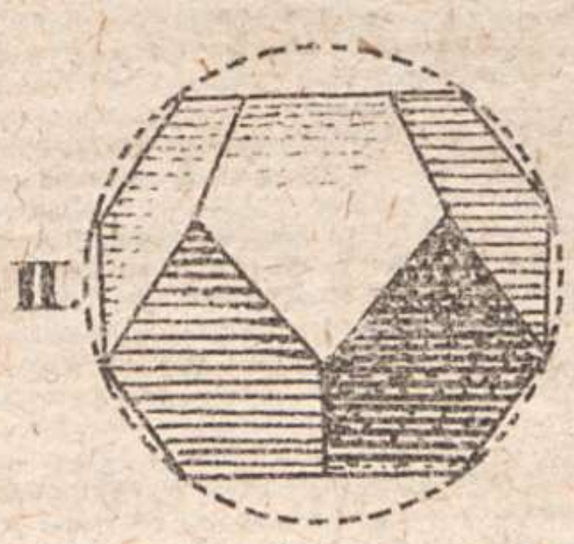
Ein **Oktaedrum** ist ein Körper, welcher von acht gleichen gleichseitigen Dreyecken umgeben ist. Fig. II.

Ein **Ikosaedrum** ist ein Körper, welcher von zwanzig gleichen gleichseitigen Dreyecken umgeben ist. Fig. III.

I.



II.



Ein **Hexaedrum**, oder **Würfel** (Kubus) ist ein Körper, welcher von sechs gleichen Quadraten umgeben ist. Fig. I.

Ein **Dodekaedrum** ist ein Körper, welcher von zwölf gleichen regelmäßigen Fünfecken umgeben ist. Fig. II.

289. Bey dem Tetraeder bilden drey gleichseitige Dreyecke einen Körperwinkel. Weil nun der Winkel eines gleichseitigen Dreyeckes 60° hält; so geben die drey Dreyecke zusammen drey Mahl 60°; das ist 180°.

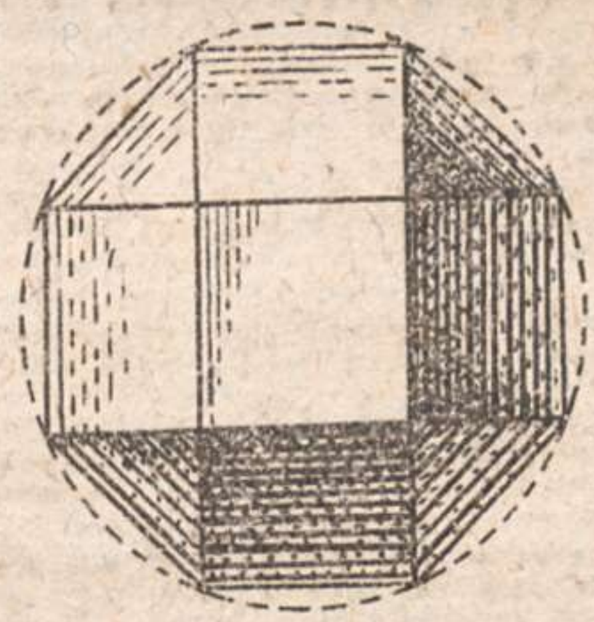
Beym Oktaeder bilden vier gleichseitige Dreyecke einen Körperwinkel; folglich hält dieser vier Mahl 60°; das ist 240°.

Beym Ikosaeder machen 5 gleichseitige Dreyecke einen Körperwinkel, welcher folglich $5 \times 60 = 300°$ in sich enthält.

Beym Würfel machen drey rechtwinklichte Dreyecke einen Körperwinkel, welcher folglich drey Mahl 90°; das ist 270° hält.

Beym Dodekaeder bilden drey regelmäßige Fünfecke einen Körperwinkel. Da nun nach Seite 136. Nro. 137., der Winkel eines regelmäßigen Fünfeckes 108° hält; so geben drey solche Winkel drey Mahl 108°; das ist 324°.

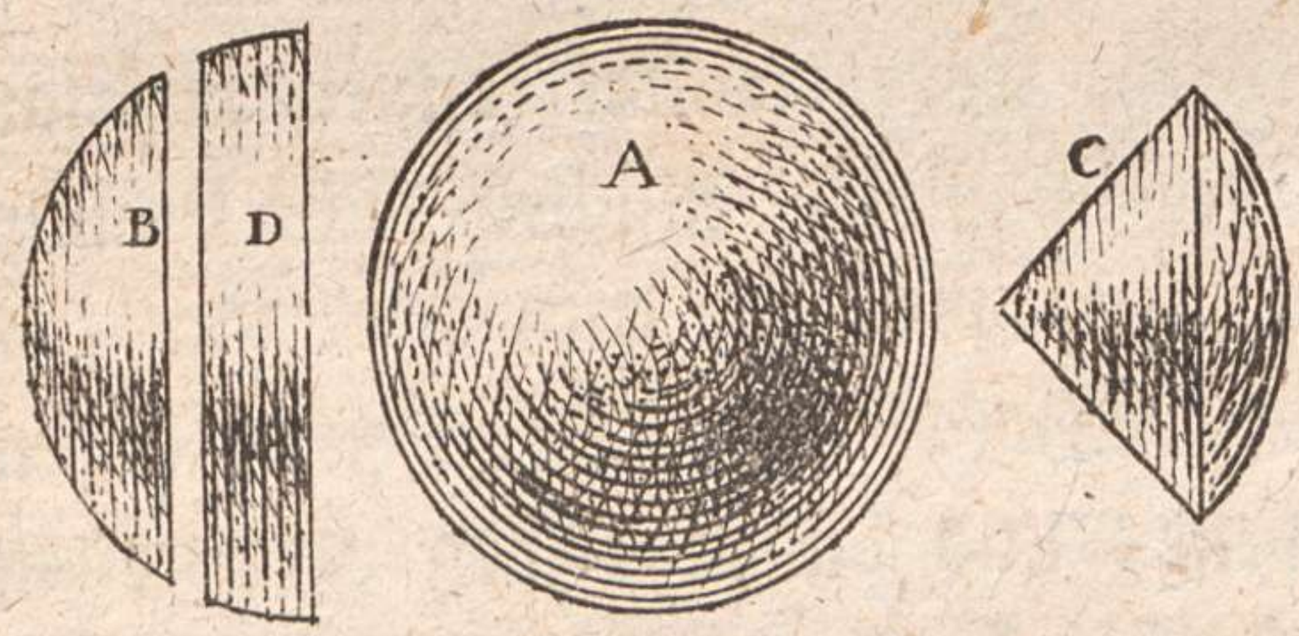
Mehrere Körperwinkel können aus lauter gleichen regelmäßigen Flächen nicht zusammen gesetzt werden, weil alle entweder 360°, oder darüber haben würden. Denn 360° liegen in einer Ebene, und bilden keinen Körperwinkel. Mehr als 360° können weder einen Winkel bilden, noch in einer Ebene liegen; daher es auch nicht mehr, als die obigen regelmäßigen Körper-Vielecke geben kann.



290. Wir wollen hier noch einen andern Körper vormerken, der zwar nicht zu den regelmäßigen Körper-Vielecken gehört; aber doch mit ihnen einige Aehnlichkeit hat, und zu verschiedenen Zierden gebraucht wird. Dieß ist der Körper des Archimedes, der von 18 gleichen

Quadraten und 8 gleichen gleichseitigen Dreyecken umgeben ist.

291. Die obigen regelmäßigen Körper-Vielecke, so wie der Körper des Archimedes lassen sich in Kreise hineinbeschreiben, weil ihre Ecken alle gleichweit von dem Mittelpunkte entfernt sind, wie die Zeichnungen zeigen.



292 Die Kugel A ist ein Polyedrum oder regelmäßiges Körper-Vieleck, welches von unendlich vielen kleinen Vielecken eingeschlossen ist, die alle gleich weit von dem Mittelpunkte entfernt sind, und ihre Oberfläche bilden. Die Achse einer Kugel wird die gerade Linie genannt, welche von einem Punkte ihrer Oberfläche auf die entgegen gesetzte Seite durch den Mittel-Punkt geht. Die Enden der Achse nennt man Pole. Die größte Kreisfläche einer Kugel ist die, welche entsteht, wenn die Kugel durch ihre Achse geschnitten wird.

293. Ein Kugelabschnitt B ist ein Körper, welcher mit einem Theile der Oberfläche der Ku-

gel, und mit einer Kreisfläche begränzt ist, und der entsteht, wenn ein Theil der Kugel durch eine Fläche abgeschnitten wird. Geht der Schnitt durch den Mittelpunkt; so entstehen zwey gleiche Halb-Kugeln.

294 Ein **Kugelausschnitt** C ist ein Körper, welcher einem Theil der Oberfläche der Kugel, zur Grundfläche, und seinen Scheitelpunkt in dem Mittelpunkte der Kugel hat.

295. Ein **Kugelband** oder **Zone** D ist ein Theil der Oberfläche einer Kugel, welcher zwischen zwey gleichlaufenden Kreislinien enthalten ist.

Von der Aufzeichnung und Ausmessung der Körper.

296. Weil ein Körper außer seiner Länge und Breite auch noch eine Dicke oder Höhe hat, so können diese drey Theile nicht zugleich auf einer Fläche, auf dem Papiere, nach allen drey Maaßen vorgestellt werden. Man ist daher gezwungen, die Körper nach ihren verschiedenen Flächen und Durchschnitten so zu zeichnen, daß die Maaße derselben nach einem verjüngten Maaßstabe aufgetragen, und abgenommen werden können.

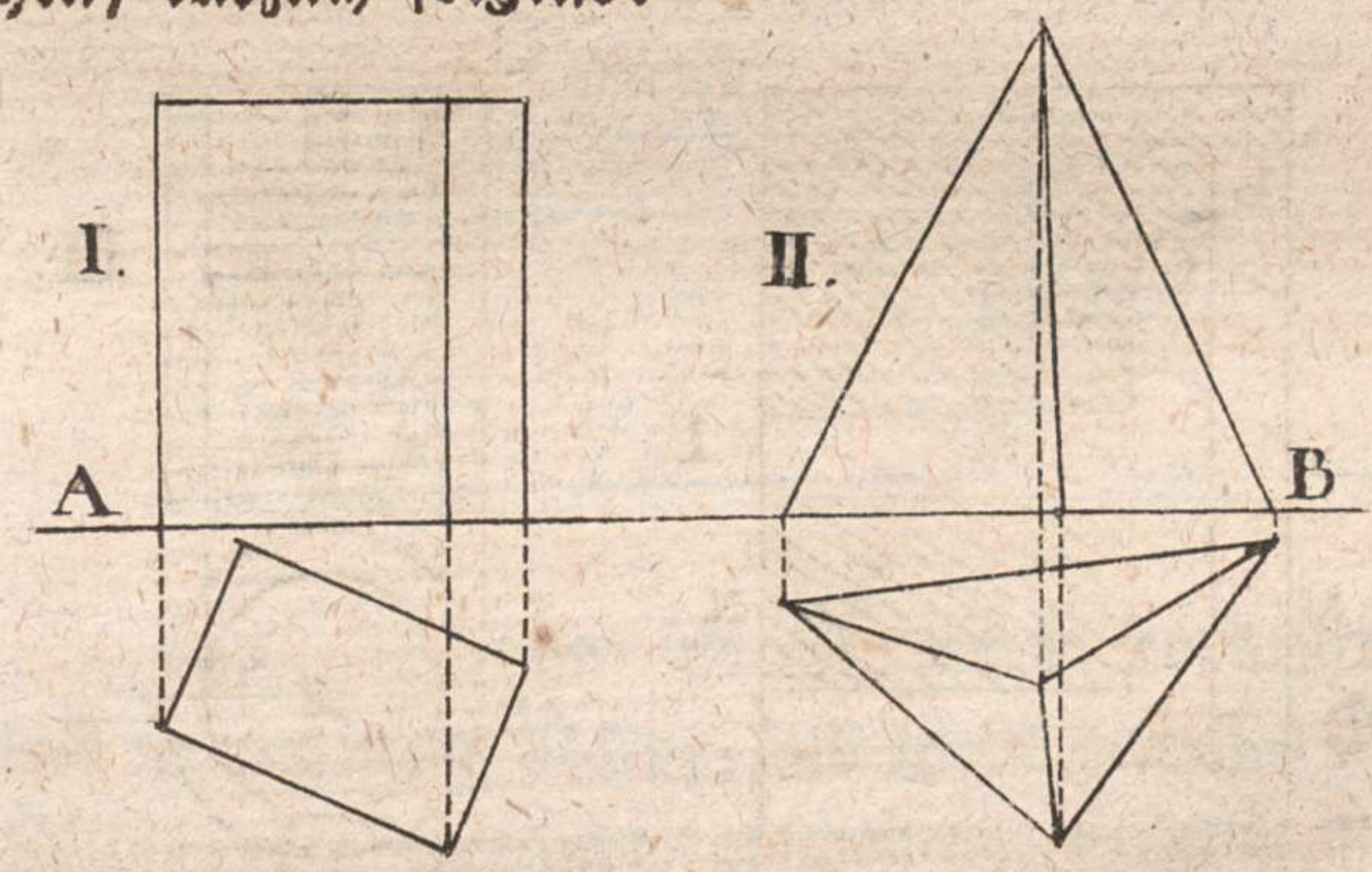
Diese Zeichnungen sind sowohl für die Baukunst, als für die dahin einschlägigen technischen Künste von großer Wichtigkeit; weil man dadurch in den Stand gesetzt wird, Werke von großem und weitschichtigem Umfange nach einem verjüngten Plane, oder Risse ins Große auszuführen.

Um einen Körper nach seinen Maaßen richtig darzustellen, muß vor allen die Grund-Fläche desselben aufgezeichnet werden. Dieser folgt die vordere senkrechte Fläche. Die Erste zeigt die Länge und Breite, die Zweyte die Höhe eines Körpers an.

In der Baukunst nennt man die Zeichnung der Grundfläche, oder diejenige, welche ein Gebäude so darstellt, wie es aussehen würde, wenn es wagerecht durchschnitten wäre, den **Grundriß**; und die Kunst, die diese Zeichnung hervorbringt, die **Ichnographie**. Die Zeichnung der vordern oder senkrechten Fläche wird der **Standriß** oder **Aufriß** genannt, und die Kunst diese Zeichnung zu verfertigen heißt die **Orthographie**. Werden verschiedene Vorsprünge der Gebäude durchschnitten dargestellt, ohne daß man auf die innere Einrichtung Rücksicht nimmt; so nennt man dieses das **Profil**. Wird ein Gebäude oder ein Körper so durchschnitten vorgestellt, daß man die innere Einrichtung nach

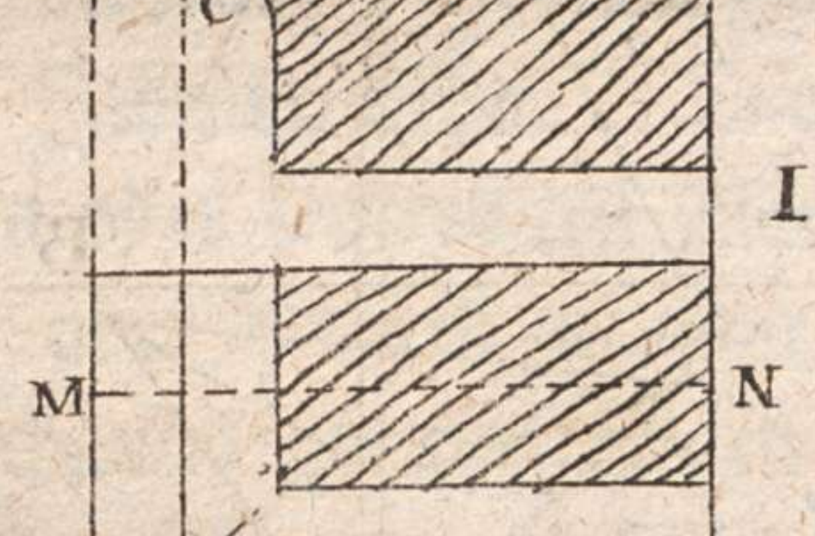
ihren verschiedenen Maaßen anzeigen kann; so heißt diese Zeichnung der Durchschnitt.

Diese verschiedenen Arten von Zeichnungen der Körper, nähmlich der Grundriß, der Standriß, das Profil, und der Durchschnitt, sind durchaus geometrisch, das ist, nach ihren verschiedenen Maaßen eingerichtet, und die Körper können dadurch nach ihrer Länge und Breite sowohl, als nach ihrer Dicke und innern Einrichtung vorgestellt, und die Maaße derselben auf einem verjüngten Maaßstabe abgenommen werden. Die Art, diese verschiedenen Zeichnungen zu verfertigen ist bey bloß geometrischen Körpern, aus welchen die baukünstlichen hervorgehen, kürzlich folgende:

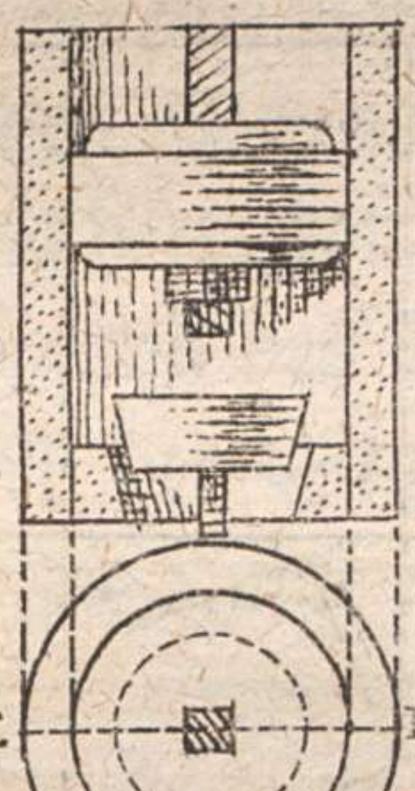


Man verfertigt vor allem den Grundriß; zieht eine wagerechte Linie A B, tragt alle Punkte von den Ecken oder Winkeln des Grundrisses senkrecht auf diese Linie, und erhebt sie

nach Art des Körpers, und nach seiner Höhe zu Flächen. Die Grundfläche mit den übrigen wagerechten Flächen bleiben bloße wagerechte Linien, weil die Theile sonst ihr gehöriges Höhen-Maaß verlieren würden, wie man bey Fig. I. sieht. Ist der Körper spitzig, so wird diese Spitze im Grundrisse durch einen Punkt angezeigt; senkrecht auf die Grundlinie getragen, und von dort aus senkrecht aufgerichtet, wie die Figur II. zeigt. Bey der Kugel kann die größte Kreisfläche als ihre Grundfläche betrachtet werden. Die Grundrisse zeigen überall die Länge und Breite; die Standrisse aber die Höhe der Körper an. Bey den obigen Erklärungen sind die Körper alle auf diese Art vorgestellt.



I.



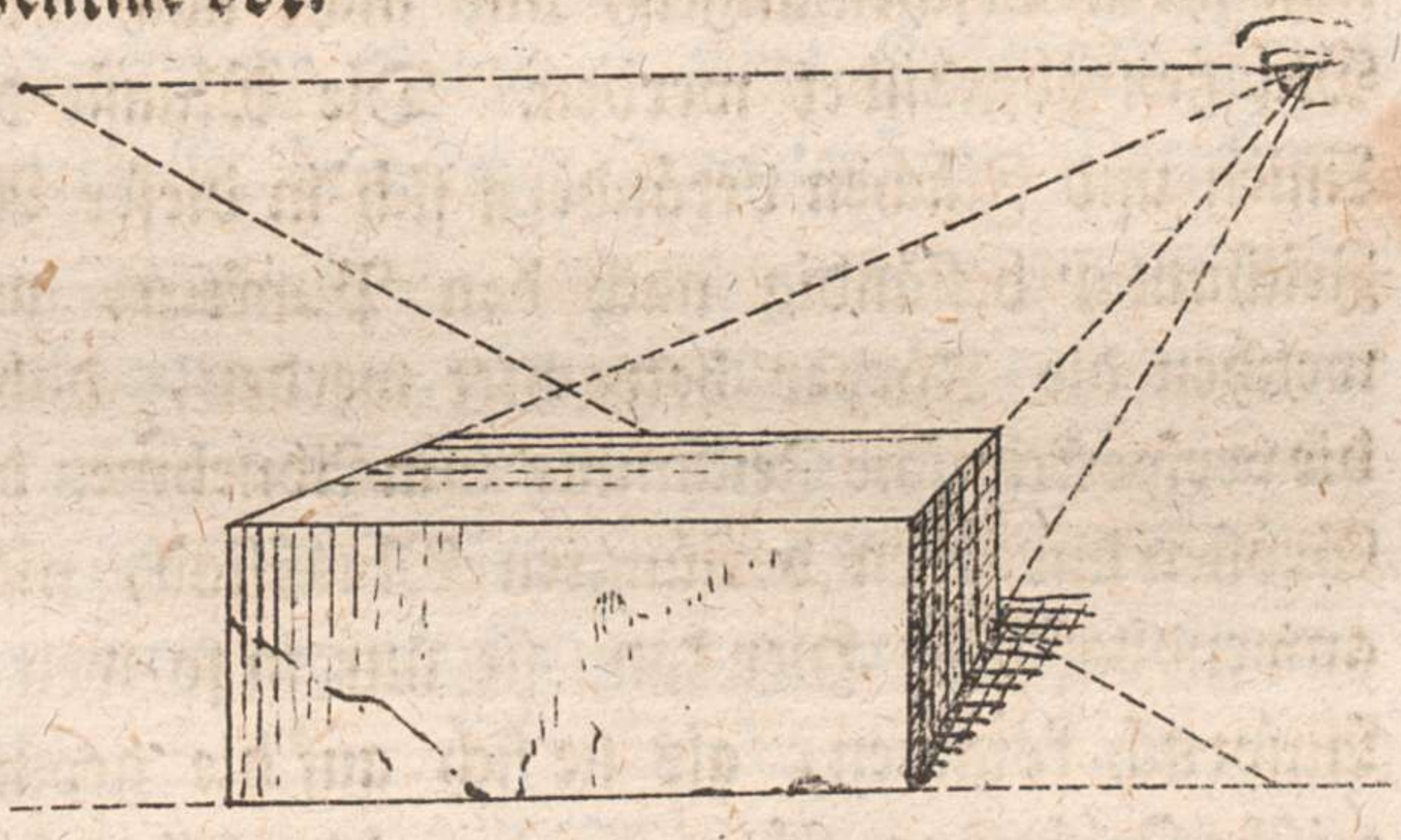
III.

II.

Bey den Profilen kömmt bloß der äußere Umriß A B C nach seinen geometrischen Maaßen und Vorsprüngen in Betracht, daher das Profil nur als eine Fläche vorgestellt wird; kann aber auch aus dem Grundrisse, wenn selber

durch eine Linie M N durchschnitten wird, senkrecht in den Standriß gebracht werden, wie dieses die Figur I. zeigt.

Der Durchschnitt entsteht, wenn man die Grundfläche mit einer Linie durchschneidet, die Punkte des Durchschnittes auf die gleichartigen, oder gleichnahmigen Theile senkrecht in den Standriß trägt, und dieselben durchschneidet. Die Figur II. stellt den Grundriß; E F, die Durchschnittslinie, und die Figur III. die durchschnittene Röhre mit ihrem Kolben und dem Ventille vor.



297. Werden die Körper so vorgestellt, wie sie uns in der Natur, aus einem gewissen Gesichtspunkte betrachtet, erscheinen; so nennt man diese Zeichnung die perspektivische, oder scenographische. Sie entsteht vermittelst der Durchschneidungen zweyer Linien, die auf zwey Hauptpunkte gerichtet sind, wovon einer der Gesichts- oder Augen-Punkt, und der andere der

Distanz- oder Entfernungs-Punkt genannt wird. Der Erste ist der Punkt, aus welchem unser Aug den Körper betrachtet; der Zweyte zeigt die Entfernung an, in welcher der Körper betrachtet wird; beyde stehen alle Mahl auf einer horizontalen Linie, welche in der nähmlichen Höhe, wie das betrachtende Aug über die Grundfläche der Körper erhoben liegt.

Die perspektivische Zeichnung der Körper ist ein Haupttheil der freyen Handzeichnung, und der Mahlerey, weil dort die Körper nur nach ihren Erscheinungen, und nicht nach ihren Maaßen abgebildet werden. Die Maaße der Linien und Flächen verändern sich in dieser Art Zeichnung beständig nach den Punkten, aus welchen die Körper betrachtet werden, daher die perspecktivische Zeichnung zum Abnehmen der Größen durch den verjüngten Maaßstab, nicht anwendbar ist. Hier kann sie nur in so weit in Anspruch kommen, als sie sich auf die geometrische Zeichnung stützet, und aus derselben hervorgeht. Durch die optischen Regeln erhält sie ihre weitere Ausarbeitung.

298. Weil die Körper bloß nach ihren Flächen dargestellt werden; so kann das Ausmessen derselben für den, der die Flächenausmessung versteht, keine weitere Schwierigkeit haben.

Bey runden Körpern bedient man sich, um den Durchmesser zu finden, des Greifzirkels, Figur I. und um die Längen der Umkreise zu erhalten, des Reifmaaßes, Figur II., welches man auch Rollmaaß nennet, und das aus mehreren starken, aber schmalen Streifen von Papier oder Pergament zusammen gesetzt ist, worauf sich der landesübliche Schuh in seine Zolle und Linien eingetheilt, befindet. Zum leichtern Berechnen kann man auf einer Seite auch das Dezimal-Maaß auftragen. Dieses Rollmaaßes, wenn es von einer beträchtlichen Länge ist, bedient man sich auch zum Ausmessen der Linien in Gebäuden, und zur Aufhebung geometrischer Bau-Pläne.

299. Will man den körperlichen Inhalt eines Körpers wissen; so muß ein anderer Körper als Grundmaaß angenommen werden. So wie zum Ausmessen der Flächen das Quadrat das schicklichste Maaß ist, so ist für die Körper der Würfel oder Kubus, das brauchbarste. Der Kubikschuh, welcher einen landesüblichen Schuh in der Länge, Breite und Dicke hält, ist also das Grundmaaß für die Körper.

300. In dem neuen französischen Maaße wird bey festen Körpern, und vorzüglich beym Holzmaaße der Kubikmetre angenommen, welcher Stere genannt wird. Ein Kubikmetre oder Stere ist ein Körper, der einen Metre Länge, Breite und Dicke hält. 3 Steres Holz machen ungefähr eine baierische Klafter zu 6 Schuh Länge und Breite, und $3\frac{1}{2}$ Schuh Scheiterlänge. Größere Abtheilungen des Kubikmaaßes kommen nicht mehr vor.

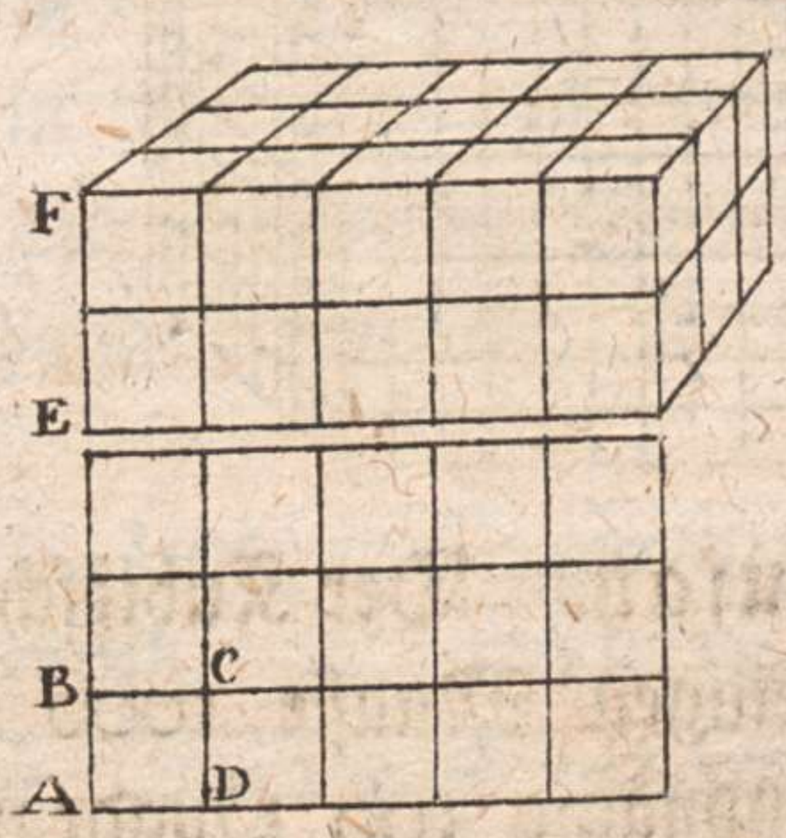
301 Bey flüßigen Körpern, als: Wein, Bier, Getreid ꝛc. ist der Litre das Grundmaaß, welches ein Körper von einem Dezimetre, oder einem Zehntheile eines Metres Länge, Breite und Dicke ist, und nach dem Getränkmaaße nicht gar eine baierische Maß, sondern nur $\frac{1}{1}\frac{5}{6}$ derselben enthält; daher 16 Litres 15 baierische Maß ungefähr ausmachen. 60 baierische Maß oder ein Eimer hält also ungefähr 64 Litres. Im Getreidmaaße geben 15 Litres ungefähr 13 Dreyßiger, und folglich ein baierisches Schäffel schwer Getreid 221 $\frac{7}{1}\frac{}{3}$ Liters ungefähr.

Die kleinern Abtheilungen eines Litres sind wieder die **Zehntheile, Hundertheile** und **Tausendtheile** desselben. Der zehnte Theil eines Litres heißt **Dezilitre**; der hundertste **Zentilitre**; der tausendste **Millilitre**. Die größern Abtheilungen sind folgende: 10 Litres werden ein **Dekalitre**, 100 Litres ein **Hektolitre**,

1000 Litres ein **Kilolitre**, und 10000 Litres ein **Myrialitre** genannt.

302. **Auch das neue französische Gewicht** ist aus den Theilen des Meeres entnommen. Denn die Schwere von einem Kubik-Zentimetre rein destillirten Wassers ist als Einheit desselben angesehen, und heißt **Gramme**. Die Benennungen der kleinern Theile sind wieder: Dezigramme, der zehnte Theil; Zentigramme, der hundertste Theil; Milligramme der tausendste Theil eines Grammes. Die größern Abtheilungen sind: Dekagramme, 10 Grammen; Hektogramme, 100 Grammen; Kilogramme, 1000 Grammen; und Myriagramme, 10000 Grammen. 10 baierische Pfund geben ganz genau 5609 Grammen.

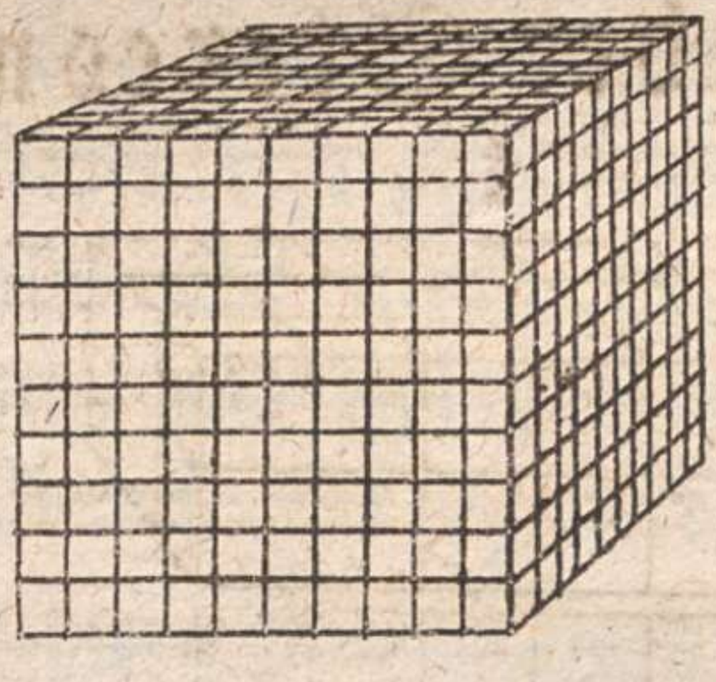
Lehrsätze der Stereometrie.



303. **Lehrsatz.** Der körperliche Inhalt eines geradestehenden Parallelepipedums wird erhalten, wenn man die Grund-Fläche mit der Höhe multiplizirt.

Beweis. Gesetzt, es halte in der obigen Figur ein kleines Quadrat auf der Grundfläche A B C D einen Quadratschuh, so zeigt die Grundfläche an, wie viele Kubikschuhe auf derselben liegen können, und E F zeigt an, wie viele Schichten solcher Kubikschuhe aufeinander gelegt werden können; es giebt also offenbar die Grundfläche, multiplizirt mit der Höhe, den kubischen Inhalt eines geradestehenden Parallelepipedums.

304. **Zusatz.** Weil der Würfel oder Kubus eine Figur ist, wo die Länge, Breite und Höhe einander gleich sind; so entsteht alle Mahl ein Würfel, so oft eine Zahl oder Linie mit sich sebst, und das Produkt noch ein Mahl mit dernähmlichen Zahl oder Linie multiplizirt wird.



305. **Zusatz.** Der Kubikschuh hält also im zehntheiligen Maaße 1000 Kubikzolle; weil die Grundfläche 100 Quadratzolle hält, und diese noch ein Mahl mit 10 Zollen, als der Höhe des Kubikschuhes multiplizirt werden müssen, woraus 1000 Kubikzolle entstehen. Der

Kubikzoll hält wieder 1000 Kubiklinien. Will man also Kubikschuhe zu Kubikzollen machen; so müssen 3 Nullen hinzu gesetzt; macht man aber Kubikzolle zu Schuhen, so müssen die letzten drey Ziffer hinweg geschnitten werden; weil erst 1000 Kubikzolle einen Kubikschuh ausmachen, und alle übrigen Zahlen, die weniger betragen, nothwendig Kubikzolle seyn müssen. Im zwölftheiligen Maaße hält der Quadratschuh 144 Quadratzolle, diese mit 12 Zoll multiplizirt geben 1728 Kubikzolle.

306. Das Zeichen einer Kubikzahl ist ein kleines c, oberhalb den Zahlen vor dem Zeichen der Schuhe und Zolle.

$36^{c\prime}$ $50^{c\prime\prime}$

36 Kubikschuh, 50 Kubikzoll.

307. Weil man weiß, daß 1000 zehntheilige Kubikzolle 1728 zwölftheilige geben; so kann man auf eine leichte Art das zehntheilige Kubikmaaß in zwölftheiliges verwandeln. Es sollen z. B. 346 zehntheilige Kubikzolle in zwölftheilige verwandelt werden; so ist der Ansatz folgender:

$X^{c\prime\prime}$ zwölfth.	$346^{c\prime\prime}$ zehnth.
1000 zehnth.	1728 zwölfth.

Antwort $597\frac{888}{1000}{}^{c\prime\prime}$

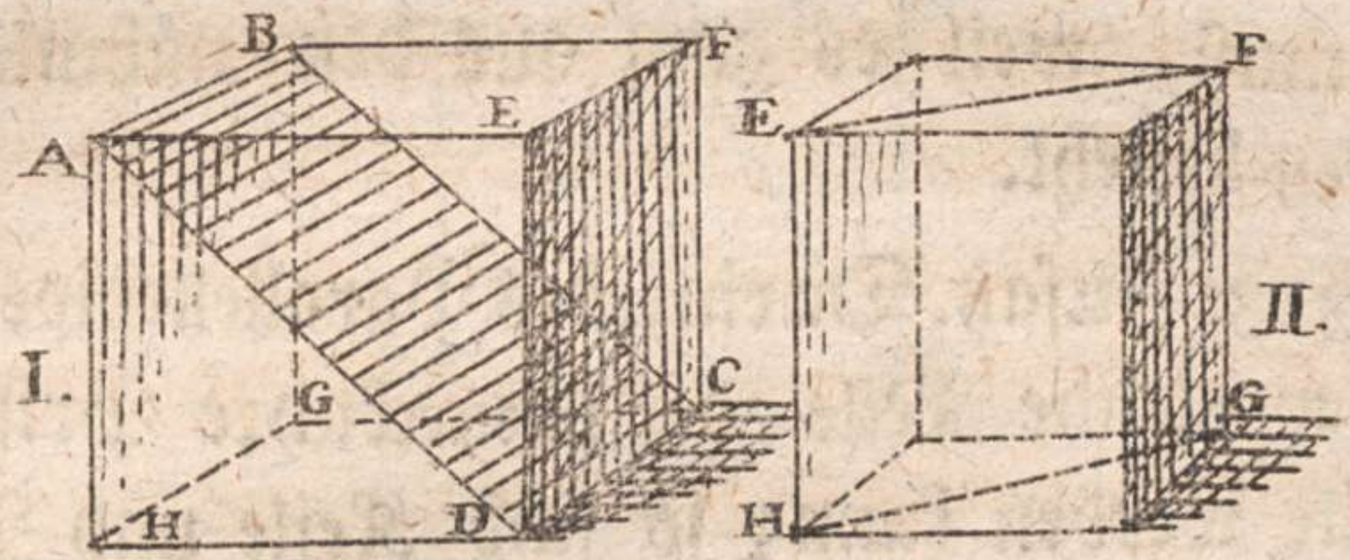
308. **Anmerkung.** Weil der Unterschied des zehntheiligen Maaßes zu dem zwölftheiligen, bloß in Zollen besteht, und die nach einer

vollendeten Rechnung übrig gebliebenen Kubik-Zolle in den meisten Fällen in keinen Betracht kommen, oder leicht zu viertel, und achtel Schuhen angeschlagen werden können, wodurch größtentheils eine hinlängliche Genauigkeit erlangt wird: so kann man die Dezimalrechnung auch bey der Kubikrechnung in bürgerlichen Geschäften anwenden.

309. **Nach dem neuen französischen Maaße** hält der Quadratmetre 100 Quadrat-Dezimetres, und folglich der Kubikmetre 1000 Kubik-Dezimetres. Es hat also der Kubik-Dezimetre, wieder 1000 Kubik-Zentimetres, und der Kubik-Zentimetre, 1000 Kubik-Millimetres; daher müssen auch hier, wenn man kleinere Theile zu größern machen will, rückwärts angefangen, drey Ziffer abgeschnitten werden, wie dieses bey dem zehntheiligen Fußmaaße der Fall ist. Die Kubikzahl $34^c\,',692^c\,'',530^c\,'''$ bedeutet also: 34 Kubikmetres, 692 Kubik-Dezimetres und 530 Kubik-Zentimetres; oder nach der Nro. 218. angezeigten deutschen Uebersetzung 34 Kubikmetres, 692 Zehntheile, und 530 Hundert-Theile.

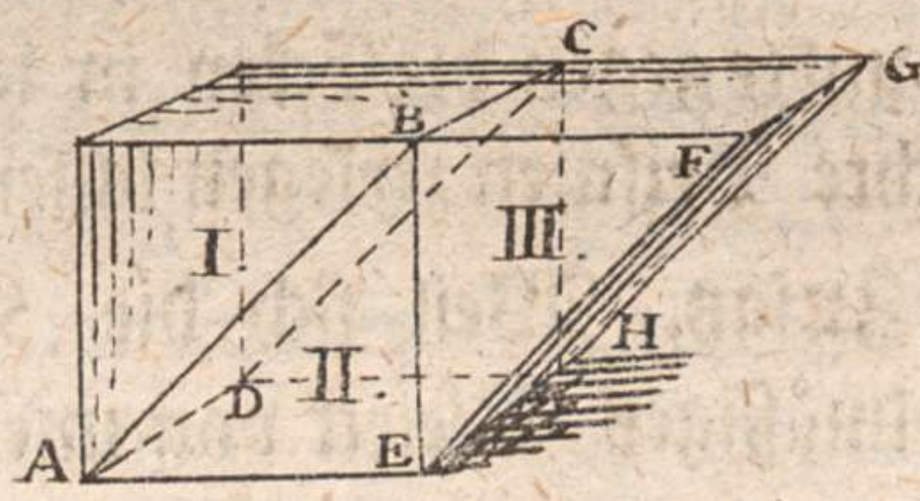
310. **Lehrsatz. Die Diagonalfläche A B C D theilt ein Parallelepipedum in zwey gleiche Theile.** Fig. I.

Beweis. Da die einschließenden Flächen und Winkel der beyden Theile vollkommen



gleich sind, so sind die beyden Körper A B C D E F, und A B C D G H in nichts von einander unterschieden, folglich ebenfalls einander gleich.

311. Zusatz. Wird das Parallelepipedum Fig. II. durch die Diagonalfläche E F G H getheilt; so entstehen aus der obigen Ursache zwey gleiche Prismen, wo im vorhergehenden Falle zwey gleiche Keile entstehen, welche, wenn man sie gehörig wendet, ebenfalls Prismen vorstellen.

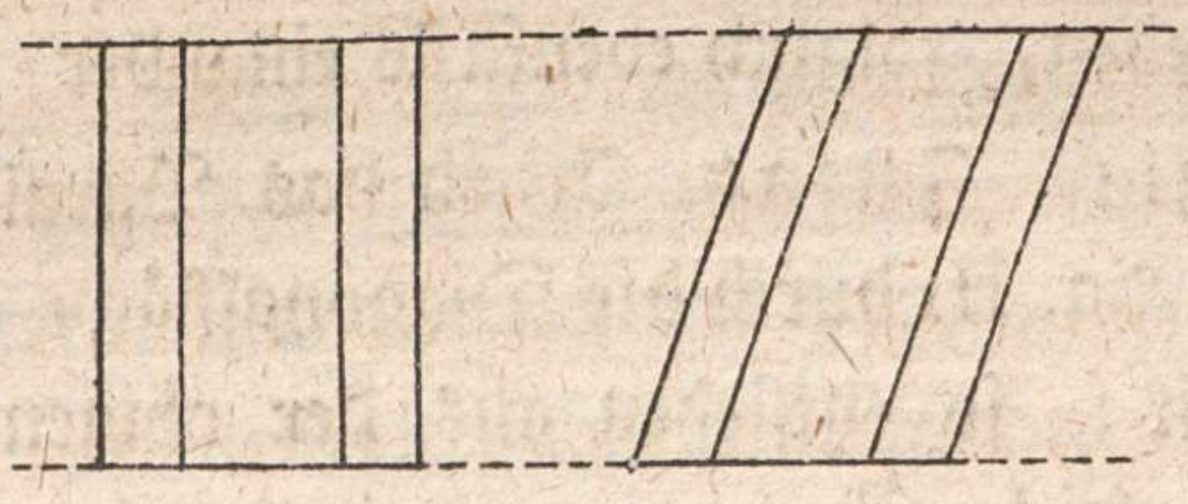


312. Lehrsatz. Parallelepipeden von einerley Grundfläche und Höhe sind einander gleich.

Beweis. Zerschneidet man das Parallelepipedum I. II. durch A B C D in zwey gleiche Theile, und legt den Theil I. nach III.; so hat man ein schiefstehendes Parallelepipedum A B C D E F G H von gleicher Grundfläche und Höhe, welches dem geradestehenden vollkommen gleich

seyn muß, weil es ganz aus den nähmlichen Theilen besteht.

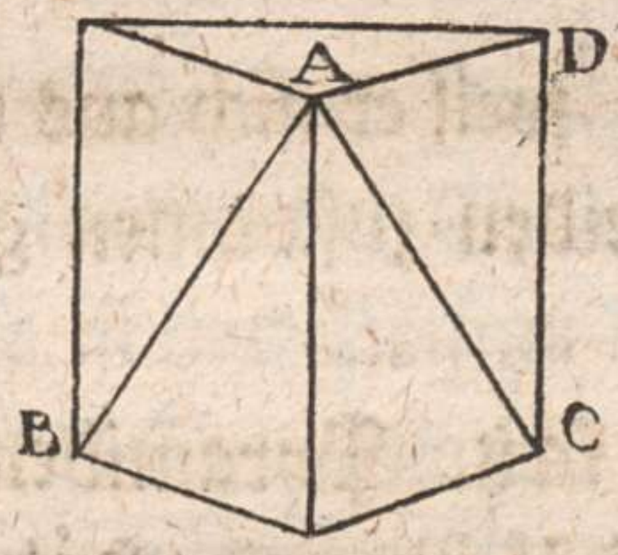
313. Zusatz. Da ein jedes Parallellepipedum in zwey gleiche Keile oder dreyeckichte Prismen getheilt werden kann; so sind Keile und Prismen von einerley Grundfläche und Höhe ebenfalls einander gleich.



314. Zusatz. Auch vieleckichte Prismen von einerley Grundfläche und Höhe sind einander gleich; weil sie sich durch Schnitte aus ihrem Mittelpunkte gegen die Ecken in lauter gleiche dreyeckichte Prismen zerlegen lassen.

315. Zusatz. Weil sich die Kreisfläche als ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten betrachten läßt; so können auch Zylinder, als aus unendlich vielen dreyeckichten Prismen zusammen gesetzt, betrachtet werden; folglich sind auch Zylinder von gleichen Grundflächen und Höhen einander gleich.

316. Lehrsatz. Eine dreyeckichte Pyramide ist der dritte Theil von einem dreyeckichten Prisma, das mit ihr einerley Grund-Fläche und Höhe hat.



Beweis. Wenn man ein dreyeckichtes Prisma von einer Ecke A gegen die entgegengesetzte Seite B C schneidet, so erhält man eine dreyeckichte Pyramide A B C. Schneidet man den übrig gebliebenen Körper noch ein Mahl nach der Diagonallinie seiner größten Fläche B D; so erhält man wieder zwey Pyramiden. Man hat also drey dreyeckichte Pyramiden, wovon zwey vollkommen gleich und ähnlich sind, die dritte aber mit den zweyen einerley Grundfläche und Höhe hat, und folglich den beyden ebenfalls gleich ist. Es ist also die dreyeckichte Pyramide der dritte Theil eines dreyeckichten Prisma, welches mit ihr einerley Grundfläche und Höhe hat. Der Beweis kann am deutlichsten durch wirkliche Zerschneidung eines solchen Prisma gemacht werden.

317. Wei sich vieleckichte Prismen in dreyeckichte zerlegen lassen; so ist auch eine vieleckichte Pyramide wieder der dritte Theil eines vieleckichten Prisma von einerley Grundfläche und Höhe.

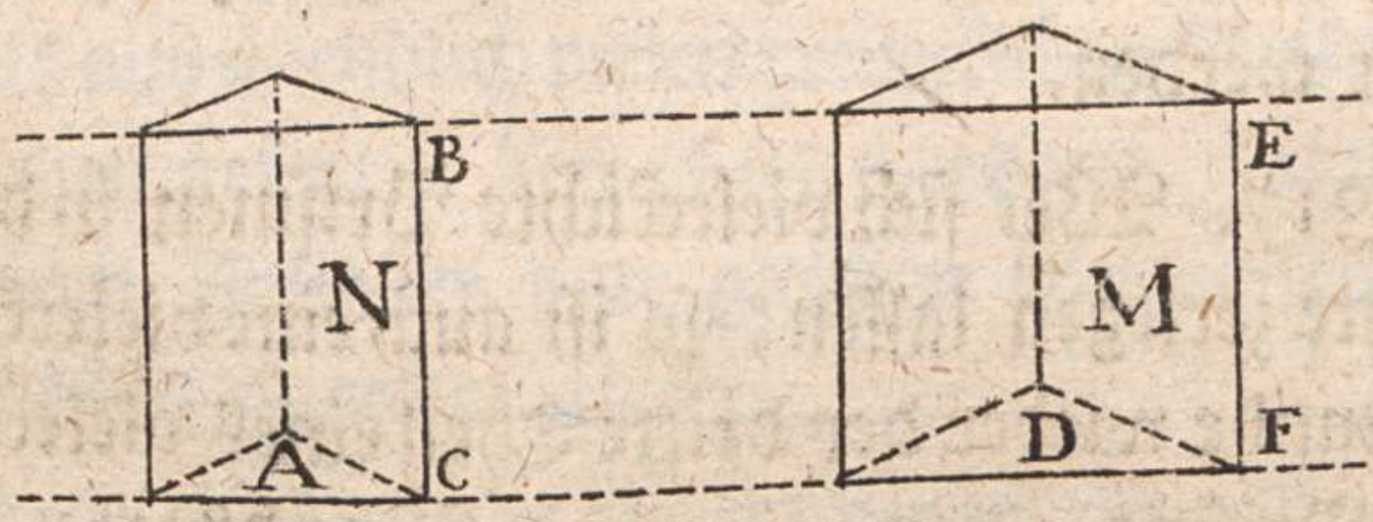
318. Auch der Kegel ist der dritte Theil einer Walze, die mit ihm einerley Grundfläche

und Höhe hat; weil er sich aus lauter unendlich kleinen Pyramiden zusammen gesetzt betrachten läßt.

319. Zusatz. Pyramiden und Kegel von einerley Grundfläche und Höhe sind einander gleich; weil sie Drittetheile von Prismen sind, und die Drittetheile sich wie die Ganzen verhalten.

320. Zusatz. Weil die Grundflächen einander gleich seyn können, ohne die nähmliche Anzahl von Seiten zu haben; so können auch dreyeckichte Prismen, und Pyramiden vieleckichten gleich seyn, wenn sie nur Grundflächen von einerley Inhalt, und gleiche Höhen haben.

321. Zusatz. Was bisher von Pyramiden und Kegeln in Hinsicht ihrer Gleichheit gesagt wurde, gilt auch von gestümmelten Pyramiden und Kegeln; das ist: gestümmelte Pyramiden und Kegel sind einander gleich, wenn bey einer gleichen Höhe auch ihre untern und obern Flächen einander gleich sind.



322. Lehrsatz. Prismen verhalten sich wie ihre Grundflächen, wenn die Höhen gleich sind; und wie die Höhen, wenn die Grundflächen gleich sind.

Beweis. Weil der Inhalt eines Prisma aus der Multiplikation der Grundfläche mit der Höhe besteht; so ist das Prisma $N = A \times B\,C$, und $M = D \times E\,F$. Da sich nun aus zwey Gleichungen eine geometrische Proportion zusammen setzen läßt; so verhält sich

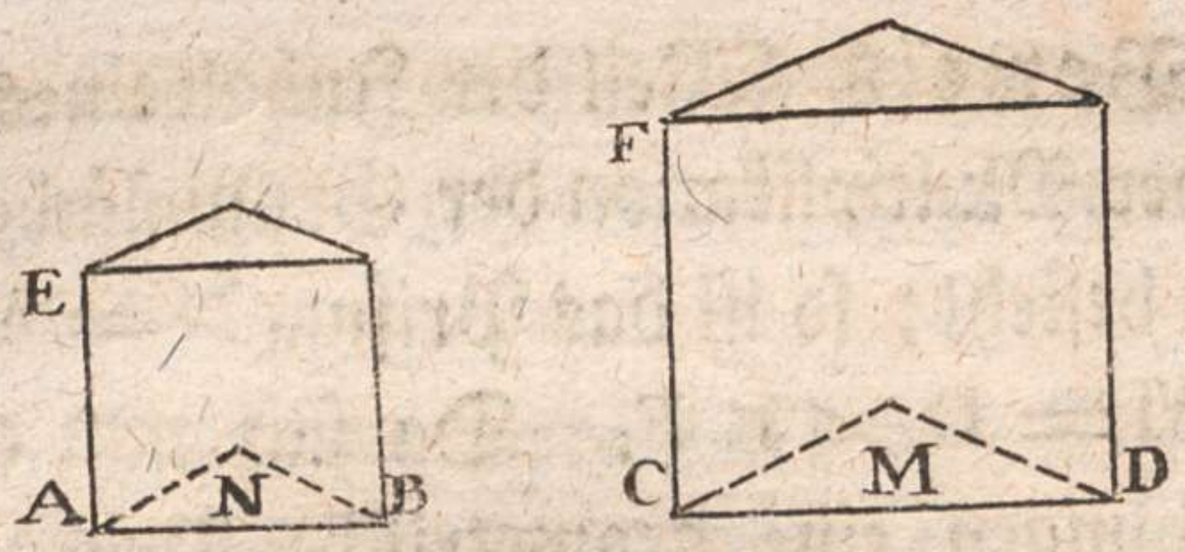
$$N : M = A \times B\,C : D \times E\,F.$$

Weil aber die Höhen gleich sind, so kann die Multiplikation mit denselben ohne Schaden der Proportion hinweg bleiben, und es verhält sich $N : M = A : D$.

Sind die Grundflächen gleich; so kann der Beweis wieder auf die nähmliche Art gemacht, und die Multiplikation mit den Grundflächen hinweg gelassen werden.

323. **Zusatz.** Da sich der nähmliche Beweis sowohl von Parallelepipeden, und den übrigen Prismen, als von Pyramiden machen läßt; so verhalten sich auch diese bey gleicher Höhe wie die Grundflächen, und bey gleichen Grundflächen wie die Höhen. Das Nähmliche gilt auch von Kegeln, weil man sie als Pyramiden betrachten kann.

324. **Lehrsatz.** Die Inhalte ähnlicher Körper verhalten sich wie die Kubusse oder Kubikzahlen ihrer ähnlich liegenden oder gleichnahmigen Linien.



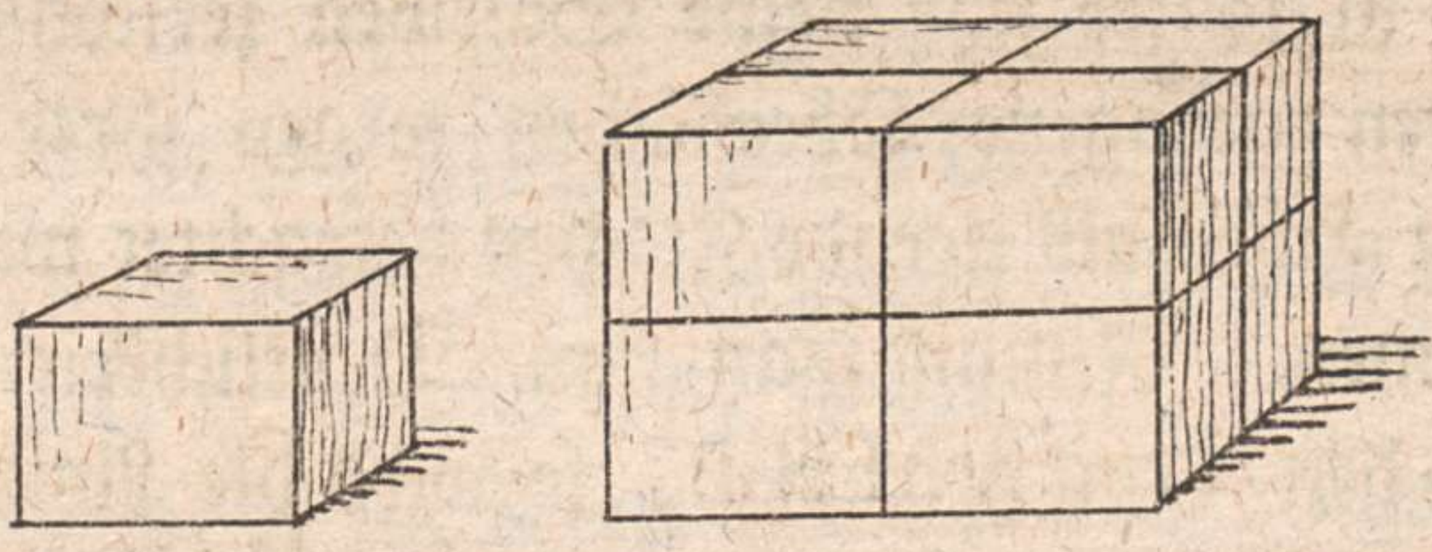
Beweis. Da sich nach Seite 147. Nro. 253. die Grundflächen verhalten, wie die Quadrate ihrer ähnlich liegenden Linien; so verhält sich die Grundfläche $N : M = AB^2 : CD^2$. Es verhält sich aber auch $EA : FC = AB : CD$, als gleichnahmige Seiten.

Multiplizirt man die Glieder der beyden Proportionen der Ordnung nach mit einander, welches nach Seite 139. Nro. 244. ohne Verletzung der Proportion geschehen kann; so ist $N \times EA : M \times FC = AB^2 \times AB : CD^2 \times CD$. Da nun $N \times EA$, und $M \times FC$ die Kubikinhalte der beyden Körper geben; $AB^2 \times AB$, und $CD^2 \times CD$ aber den Kubus von AB und CD ausmachen: so verhalten sich die Kubikinhalte der beyden Prismen, wie die Kubusse ihrer ähnlich liegenden Linien AB und CD, das ist:

$$N \times EA : M \times FC = AB^3 : CD^3.$$

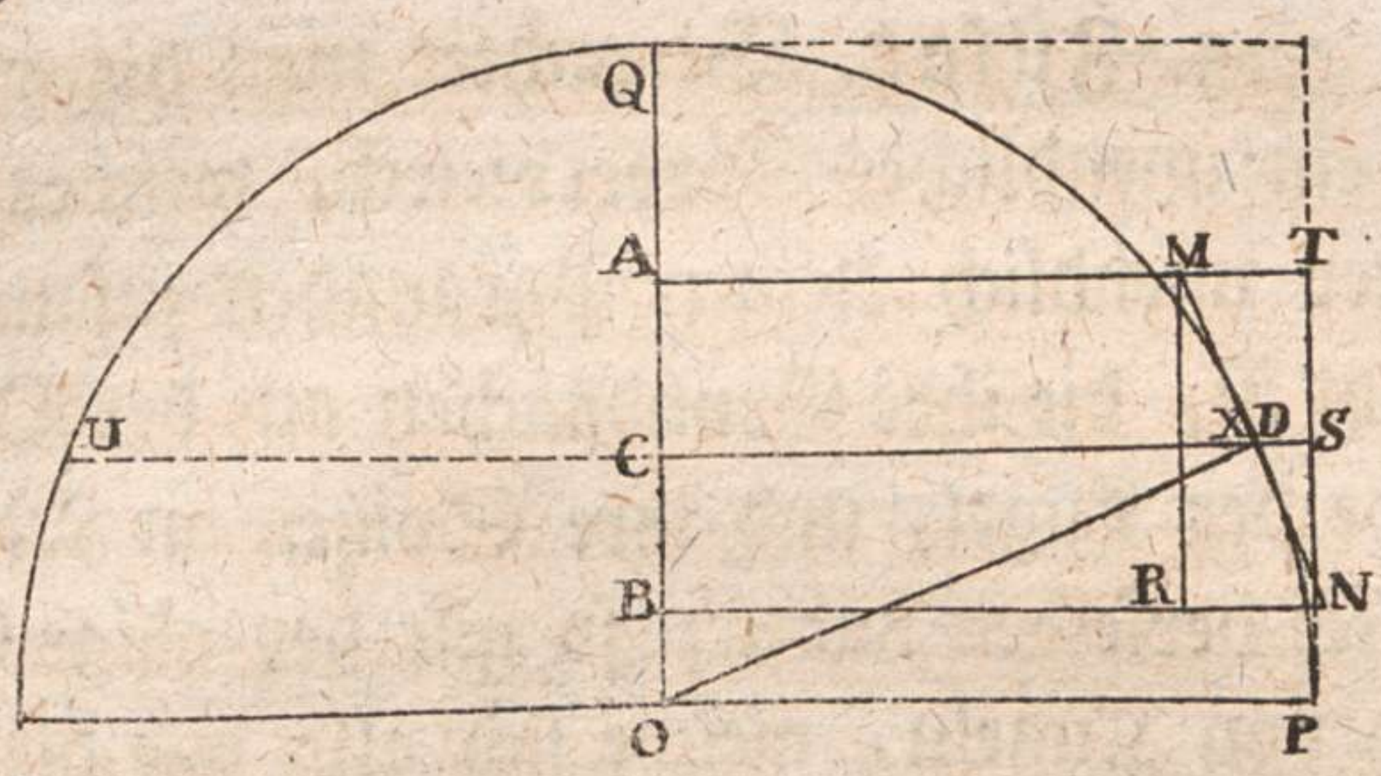
Weil der nähmliche Beweis auch von Pyramiden gemacht werden kann, und die übrigen Körper sich in Prismen oder Pyramiden zerlegen lassen; so verhalten sich die kubischen Inhalte aller ähnlichen Körper, wie die Kubusse ihrer ähnlich liegenden Linien.

325. **Zusatz.** Betrachtet man die Kugel als ein unendliches Körpervieleck, welches aus lauter unendlich kleinen Pyramiden zusammen gesetzt ist, die ihre Grundflächen auf der Oberfläche der Kugel, und ihre Spitzen im Mittelpunkte derselben haben; so gilt der obige Satz auch von Kugeln, welche sich also wie die Kubusse oder Kubikzahlen ihrer Durchmesser oder Halbmesser verhalten.



326. **Zusatz.** Vergleicht man zwey ähnliche Parallelepipeden, wovon die Seiten des einen noch so groß sind, als die des andern; so können aus dem Größern acht Kleine geschnitten werden, welches die obige Wahrheit sinnlich darstellet. Nimmt man den Durchmesser einer Kugel noch so groß, als den einer andern; so ist ihr Kubikinhalt 8 Mahl größer; ist der Durchmesser drey Mahl so groß, so ist der Kubikinhalt 27 Mahl größer; weil 8 die Kubikzahl von 2, und 27 die Kubikzahl von 3 ist.

327 **Lehrsatz.** Die Oberfläche der Kugel wird erhalten, wenn man den Durchmesser der größten Kreisfläche der Kugel mit dem Umkreise multiplizirt.



Beweis. Man denke sich die ganze Kugel in lauter sehr kleine Scheiben zerschnitten, deren gebogene Oberflächen wegen ihrer kleinen Höhe als gerade Flächen betrachtet werden können. Nimmt man nun Deutlichkeit halber den Theil A M N B, so wird die Linie C D mit M N, wenn sie sich um die Achse Q O herumdrehen würde, eine Fläche beschreiben, wovon C D der mittlere Halbmesser; und die damit beschriebene Linie, der mittlere Umkreis derselben wäre. Die mit M N beschriebene Fläche würde also gleich seyn dem Produkte, welches entstände, wenn man die, durch C D beschriebene Kreislinie, als die mittlere Länge zwischen A M und B N, mit M N multiplizirte. Dreht sich nun ferners C S mit T N um die Achse Q O, so beschreiben diese ebenfalls eine Fläche, wovon C S wieder der Halbmesser, und N T die Höhe derselben; der Flächeninhalt aber gleich dem Produkte aus N T oder A B in die mit C S beschriebene Kreislinie wäre. Diese beyden Flächen sind nun vollkommen einander gleich. Denn zieht man den Halbmesser

D O, und die Senkrechte M R, so erhält man zwey rechtwinklichte Dreyecke M N R, und D O C, welche einander ähnlich sind; weil beyde bey C und R rechte Winkel haben, und der Winkel bey O den Bogen Q D, der Winkel bey N = X aber als ein Winkel an der Peripherie den halben Bogen U Q D, das ist ebenfalls Q D zum Maaße hat; daher auch der dritte Winkel des einen Dreyecks, gleich dem dritten des andern ist. Es verhält sich also:

$$MN : MR = DO : DC$$

Setzt man anstatt M R die gleiche A B, und anstatt D O die gleiche C S, so ist:

$$MN : AB = CS : DC \text{ und also}$$

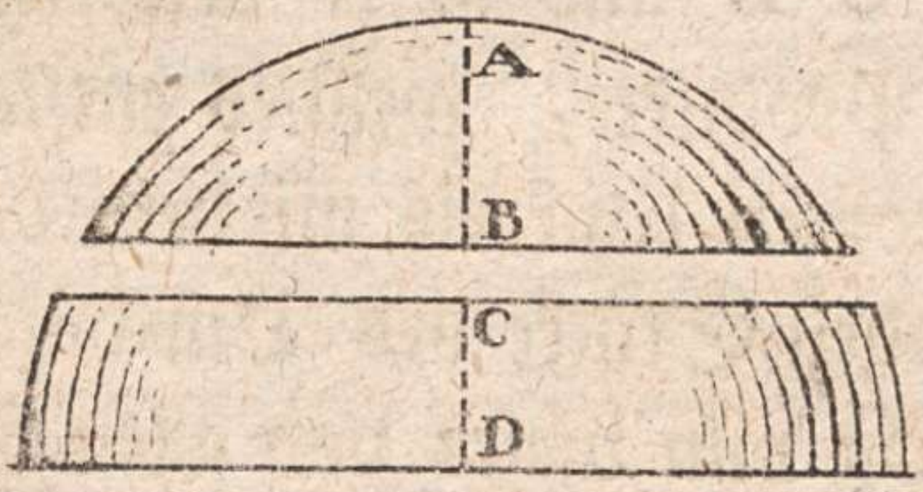
$$MN \times DC = AB \times CS.$$

Es ist aber C S gleich dem Halbmesser der größten Kreisfläche O P; und A B gleich T N ein Stück des Durchmessers; folglich die Fläche, welche mit C D und M N beschrieben wird, gleich dem Produkte, welches entsteht, wenn man den größten Umkreis mit dem damit übereinstimmenden Stücke des Durchmessers multiplizirt. Da nun dieses von allen Theilen der Kugel kann gesagt werden; so ergibt sich, daß die Oberfläche der Kugel gleich ist dem Produkte, welches entsteht, wenn man den Durchmesser mit dem Umkreise multiplizirt.

38. Zusatz. Es ist oben gezeigt worden, daß man den Inhalt einer Kreisfläche erhalte, wenn man die Hälfte des Halbmessers,

oder was Eines ist, den vierten Theil des Durchmessers mit dem Umkreise multiplizirt. Da nun bey der Oberfläche der Kugel der ganze Durchmesser mit dem Umkreise multiplizirt werden muß; so folgt, daß die Oberfläche der Kugel vier Mahl so groß ist, als ihre größte Kreisfläche, oder diejenige, welche entstände, wenn die Kugel durch ihren Mittelpunkt geschnitten würde.

329. Zusatz. Weil nach Seite 129 Nro. 228 die Kreisfläche entsteht, wenn man das Quadrat des Durchmessers mit der Zahl 314 multiplizirt; und das Produkt durch 4 und 100 oder durch 400 dividirt, so erhält man die Oberfläche der Kugel, wenn das Quadrat des Durchmessers mit der Zahl 314 multiplizirt, und nur durch 100 dividirt wird, weil die Oberfläche vier Mahl größer ist, als ihre größte Kreisfläche.



330. Zusatz. Die gebogene Oberfläche eines Kugelabschnittes ist das Produkt aus der Höhe A B multiplizirt mit dem Umkreise der größten Kreisfläche der Kugel. Eben so ist auch die Höhe C D multiplizirt mit dem nähmlichen Umkreise die Oberfläche eines Kugelbandes oder einer Zone.

331. **Lehrsatz.** Der kubische Inhalt einer Kugel ist gleich dem Produkte, welches entsteht, wenn ihre Oberfläche mit dem Halbmesser multiplizirt, und durch 3 dividirt wird.

Beweis. Die Kugel kann als ein regelmäßiges Körpervieleck betrachtet werden, welches aus unendlich vielen kleinen Pyramiden besteht, die ihre Grundflächen auf der Oberfläche der Kugel, und ihre Spitzen oder Höhen im Mittelpunkte derselben haben. Man kann sie daher als eine Pyramide berechnen, die zu ihrer Grundfläche die Oberfläche der Kugel, und zu ihrer Höhe den Halbmesser derselben hat; folglich besteht sie aus der Multiplikation der Oberfläche mit dem Halbmesser dividirt durch 3.

332 **Zusatz.** Nimmt man bey der Berechnung anstatt den Halbmesser das Doppelte, nähmlich den Durchmesser, so muß am Ende auch das Produkt mit dem Doppelten von 3, nähmlich mit 6, dividirt werden. Weil nun die Oberfläche der Kugel aus dem Quadrate des Durchmessers multiplizirt mit der Zahl 314, dividirt durch 100 besteht, und dieses Quadrat noch ein Mahl mit dem Durchmesser multiplizirt werden muß, wodurch der Kubus des Durchmessers hervorkömmt; so erhält man den körperlichen Inhalt einer Kugel am bequemsten, wenn man den Kubus des Durchmessers mit der

Zahl 314 multiplizirt, und das Produkt durch 6 dividirt.

333. Lehrsatz. Der Kegel, die Kugel und die Walze, wenn sie einerley Grundfläche und Höhe, daß ist, den Durchmesser der Grundfläche zur Höhe haben, verhalten sich zu einander, wie 1 : 2 : 3.

Beweis. Der Kubikinhalt eines Kegels besteht aus dem Quadrate des Durchmessers multiplizirt mit der Zahl 314, dividirt durch 4 und 3, oder durch 3 Mahl 4 = 12. Weil aber die Höhe gleich dem Durchmesser ist; so entsteht aus dem Quadrate des Durchmessers der Kubus desselben. Es ist also der Kubikinhalt eines solchen Kegels gleich dem Kubus des Durchmessers multiplizirt mit der Zahl 314, dividirt durch 12. Da nun bey der Kugel das nähmliche Produkt durch 6 dividirt wird; so folgt, daß der Kubikinhalt der Kugel noch so groß seye, als der des Kegels, und beyde sich wie 1 : 2 verhalten. Weil ferners das nähmliche Produkt bey der Walze durch 4 dividirt werden muß, und 4 in 12 drey Mahl enthalten ist; so verhält sich die Walze zum Kegel, wie 3 : 1; folglich zur Kugel wie 3 : 2.

Wenn also der Kegel Einen Theil hält; so hält die Kugel zwey, und die Walze drey solche Theile.

Von der Ausrechnung der Körper.

334. Aufgabe, Prismen, Parallelepipeden und Walzen auszurechnen.

Man suche den Flächeninhalt der Grundfläche, und multiplizire ihn mit der Höhe dieser Körper.

Das nähmliche Verfahren gilt auch, wenn diese Körper schief stehen, weil sie nach Nro. 312. den Senkrechten von einerley Grundfläche und Höhe gleich sind.

Bey schiefen Walzen wird die Grundfläche eine Elipse. Man kann aber dafür den Durchmesser aus der Mitte der Walze abnehmen, und mit der ganzen Länge der Achse multipliziren; wodurch man ebenfalls den körperlichen Inhalt bekömmt.

Beyspiel. Der Durchmesser einer Walze halte 5′, die Höhe 20′; wie groß wird der Kubikinhalt seyn?

Man suche zuvor die Grundfläche, welche aus dem Quadrate des Durchmessers multiplizirt mit der Zahl 314, dividirt durch 4 und 100, oder was Eines ist, durch 400 besteht. Es ist also der Durchmesser $5 \times 5 = 25$, und $25 \times 314 = 7850$. Multiplizirt man sogleich mit der Höhe $= 20'$; so erhält man 157000, und

dividirt durch 400; so ist 392 $\frac{1}{2}$c′ der körperliche Inhalt der Walze.

335. **Aufgabe. Keilartige Körper auszurechnen.**

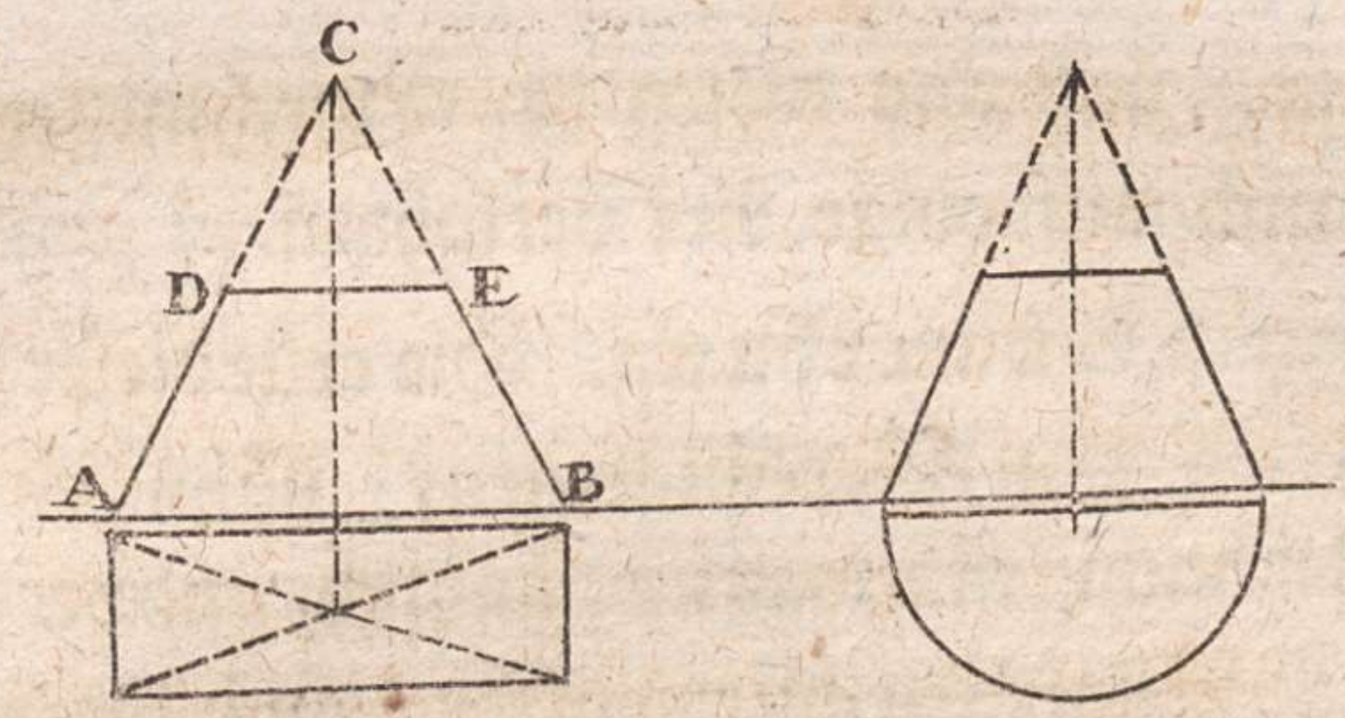
Weil der Keil die Hälfte eines Parallelepipedums ist; so multiplizire man die Grundfläche mit der Höhe, und halbire das Produkt. Das nähmliche Verfahren findet bey schiefen, wie bey geraden Keilen Statt.

336. **Aufgabe. Den körperlichen Inhalt von Pyramiden und Kegeln zu finden.**

Weil die Pyramiden Drittetheile von Prismen sind; so multiplizire man die Grundfläche mit der Höhe, und dividire das Produkt durch 3. Das Nähmliche geschieht auch bey Kegeln, weil sie als unendlich-eckichte Pyramiden können betrachtet werden. Läßt sich die Höhe bequem in drey Theile zertheilen; so kann man die Grundfläche auch mit dem dritten Theile der Höhe multipliziren. Schiefe Pyramiden und Kegel, weil diese den geraden von einerley Grundfläche und Höhe gleich sind, werden eben so berechnet.

337. **Aufgabe. Gestümmelte Pyramiden und Kegel, wo die untern und obern Fläche parallel laufen, auszurechnen.**

Man zeichne sich den Durchschnitt derselben nach dem verjüngten Maaße auf, und verlänge-

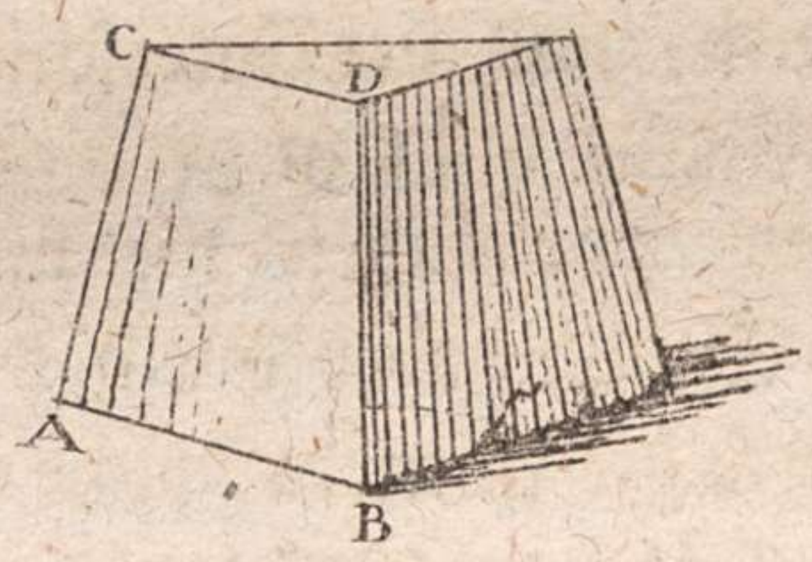


re die beyden Seiten, bis sie sich in der Spitze schneiden; rechne die ganze Pyramide A B C, dann die kleine C D E, jede besonders aus, und ziehe die letztere von der ersten ab: so gibt der Rest den Inhalt der gestümmelten Pyramide A D E B. Eben so wird auch mit dem Kegel verfahren.

In Fällen, wo keine große Genauigkeit erfordert wird, und der Unterschied der untern und obern Fläche nicht zu groß ist, können bey gestümmelten Pyramiden die beyden Flächen addirt, die Summe aber durch 2 dividirt werden, wodurch die mittlere Fläche entsteht, welche mit der Höhe multiplizirt den Kubikinhalt der gestümmelten Pyramide gibt; weil durch dieses Verfahren die Pyramide gleichsam in ein Prisma verwandelt wird. Beym gestümmelten Kegel kann ebenfalls der untere und obere Durchmesser addirt, die Summe durch 2 dividirt, und mit der Höhe multiplizirt werden. Sind anstatt der beyden Durchmesser die Umkreise gegeben; so wird aus beyden der mittlere

Umkreis, und aus diesen der Durchmesser gesucht, und auf obige Art verfahren.

338. **Anmerkung.** Die erste dieser beyden Arten von Berechnungen, nähmlich die durch Zeichnung ist etwas umständlich, und verschiedenen Zufälligkeiten unterworfen; auch die zweyte aber gibt kein ganz richtiges Resultat, und gewöhnlich zu wenig. Wollte man mit aller Schärfe verfahren, so müßten bey dem gestümmelten Kegel die beyden Durchmesser mit einander multiplizirt, das Produkt zu den beyden Quadraten derselben addirt, die Summe aber mit der Höhe, und der Zahl 314 multiplizirt, und durch 1200 dividirt werden.



Bey der gestümmelten Pyramide muß, was immer für eine Seite, z. B. A B, mit seiner ähnlich liegenden kleinern C D multiplizirt, die beyden Quadrate dieser Seiten dazu addirt, die Summe aber mit der Grundfläche und der Höhe multiplizirt, und durch das dreyfache Quadrat der größern Seite A B dividirt werden. Der Beweis dieser beyden Verfahrungsarten läßt sich nicht leicht an-

ders, als durch Hilfe der Algebra darstellen, die wir bey unsern Lesern nicht voraussetzen.

Sind die gestümmelten Pyramiden und Kegel schief; so ist aus den oft angeführten Ursachen das Verfahren das nähmliche.

339. **Aufgabe. Den Inhalt der regelmäßigen Körpervielecke zu finden.**

Außer dem Würfel lassen sich diese Körper alle als Pyramiden berechnen. Denn das **Tetraedrum** ist eine eigentliche Pyramide von lauter gleichen Flächen, und kann folglich als eine solche berechnet werden.

Das **Oktaedrum** besteht aus zwey gleichen Quadratischen Pyramiden; man sucht also den Inhalt von einer, und verdoppelt das Produkt.

Ein **Ikosaedrum** kann in zwanzig gleiche Pyramiden getheilt werden, welche alle die nähmliche Grundfläche und die Höhe in dem Mittelpunkte dieses Körpers haben; man suche also den Inhalt von einer, und multplizire ihn mit 20.

Der **Würfel** ist ein Parallelepipedum, und kann als ein solches berechnet werden.

Das **Dodekaedrum** besteht aus zwölf gleichen fünfeckichten Pyramiden; man findet also seinen Inhalt, wenn man Eine ausrechnet, und das Produkt mit 12 multiplizirt.

Eben so kann auch der Körper des Archimedes in 18 gleiche viereckichte, und 8 gleiche drey-

eckichte Pyramiden getheilt, und ausgerechnet werden.

Das wirkliche Zerschneiden sowohl dieser als der vorhergehenden Körper, die bey den Lehrsätzen vorkommen, macht die Beweise anschaulich.

340 **Aufgabe. Den körperlichen Inhalt einer Kugel zu finden.**

Er besteht nach Seite 199. Nro. 332. aus dem Kubus des Durchmessers, multiplizirt mit der Zahl 314, dividirt durch 6 und 100.

Beyspiel. Der Durchmesser einer Kugel halte 2′, 4″ Dezimalmaaß, wie viel wird der Kubikinhalt betragen?

24″
24

96
48
---
576 Quadrat
24

2304
1152

13824 Kubus des Durchm.
314

55296
13824
41472

4340736 | $7^{c}\,'\,234\,\frac{56}{100}\,^{c}\,''$
6 | Kubikinhalt.

Weil nach Seite 199 Nro. 331. die Oberfläche mit dem Halbmesser multplizirt und durch 3 dividirt, ebenfalls den Kubikinhalt der Kugel gibt; so erhält man ihn auch, wenn man die Oberfläche mit dem dritten Theile des Halbmessers, oder mit dem sechsten des Durchmessers mu tiplizirt; eben so, wenn der sechste Theil der Oberfläche mit dem Durchmesser, oder der dritte Theil der Oberfläche mit dem Halbmesser multiplizirt wird.

Den Inhalt einer Halbkugel findet man, wenn man die halbe Oberfläche mit dem dritten Theile des Durchmessers multiplizirt, oder die ganze Kugel nach dem obigen Beyspiele berechnet, und das Produkt halbirt.

341. Aufgabe. Den Inhalt eines Kugelausschnittes zu finden.

Man suche nach Seite 198. Nro 330. die gebogene Oberfläche desselben, multipliziere sie mit dem Halbmesser, und dividire das Produkt durch 3; weil dieser Ausschnitt ein Kegel ist, der zur Grundfläche einen Theil der Oberfläche der Kugel, und den Halbmesser derselben zur Höhe hat.

342 Aufgabe. Den Inhalt eines Kugelabschnittes zu finden..

Man berechne nach der obigen Art den Kugelausschnitt, und ziehe den damit verbun-

denen Kegel davon ab, so bleibt der Inhalt des Abschnitts übrig.

343. **Aufgabe. Den Kubikinhalt von ganz unregelmäßigen Körpern zu finden.**

Man wählt dazu ein Gefäß von einem quadratischen Boden, und geradestehenden Seitenwänden, welche inwendig in Schuhe, Zolle und Linien eingetheilt sind. Man nimmt dann den Körper, legt ihn in das Gefäß, und füllt dasselbe ganz mit Wasser, oder wenn es ein Körper ist, der das Wasser an sich zieht, mit Sand; zieht denselben wieder heraus, und sieht an den Seiten, um wie viel das Wasser oder der Sand gefallen ist; so kann der leere Raum ausgerechnet, und dadurch der Inhalt des Körpers gefunden werden, welcher dem leeren Raume gleich seyn wird.

344. **Aufgabe. Einen hohlen Körper auszurechnen.**

Man berechne zuvor den ganzen Körper sammt der Höhlung, dann die Höhlung besonders, ziehe den Inhalt der Höhlung von dem des ganzen Körpers ab; so gibt der Rest den verlangten Kubikinhalt.

Beyspiel. Der ganze Durchmesser einer hohlen Röhre sey 6″, der von der Höhlung 4″, die Höhe denselben 20″; wie groß wird der Kubikinhalt derselben seyn? Nach angestellter Rechnung findet man den Inhalt für den größern

Durch-

Durchmesser $565\frac{1}{5}^{c}$''; den Inhalt für den kleinern $251\frac{1}{5}^{c}$''; Rest für den Inhalt der Röhre 314^{c}''.

345. **Aufgabe. Durch den Kubik-Inhalt, und einen Faktor desselben, den andern Faktor zu finden, aus welchen beyden der Kubikinhalt des Körpers besteht.**

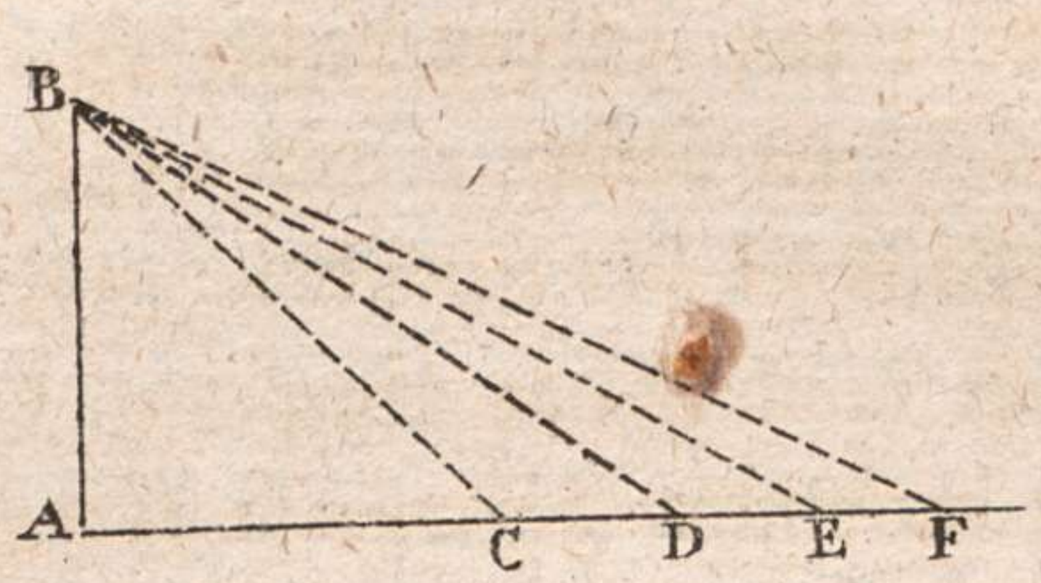
Man dividire den gegebenen Kubikinhalt mit dem bekannten Faktor, so kömmt der andere zum Vorschein, welcher durch die Multiplikation mit dem ersten den gegebenen Kubikinhalt ausmacht; denn das Produkt wird durch die Division in die nähmlichen Faktoren zerlegt, aus welchen es durch die Multiplikation entstanden ist.

Beyspiele. Der kubische Inhalt eines Prisma sey 320^{c}'', seine Höhe 5'; so gibt 5 in 320 dividirt, die Grundfläche von 64^{-}'.

Der Inhalt eines Kegels halte 540^{c}', die Grundfläche 60^{-}'; so muß 540 mit 60 dividirt, und das Produkt mit 3 multiplizirt werden, welches 27' als die Höhe des Kegels gibt. Auf eine ähnliche Art kann man auch bey andern Körpern verfahren.

Ist der Kubikinhalt einer Kugel bekannt, und man will den Durchmesser wissen; so muß der Inhalt mit 6 und 100 multiplizirt, und mit

314 dividirt werden, wodurch der Kubus des Durchmessers entsteht, aus welchem man, um den Durchmesser selbst zu erhalten, die Kubikwurzel ausziehen muß.



346. Aufgabe. Einen Visirstab zu verfertigen, womit man finden kann, wie viel Maß ein Faß, oder ein anderes zylindrisches Gefäß in sich enthalte.

Man messe den Durchmesser eines zylindrischen Maßgefäßes, und trage ihn auf zwey unter einem rechten Winkel zusammen gesetzte Linien von A nach B und C; ziehe die Hypothenuse B C: so ist diese der Durchmesser einer Fläche, auf welcher zwey Maß von der nähmlichen Höhe stehen können; weil das Quadrat der Hypothenuse B C eben so groß ist, als die Quadrate von A B und A C zusammen genommen, und die Quadrate der Durchmesser sich wie die Kreisflächen verhalten. Man trage ferners B C von A nach D, und ziehe B D; so ist dieß der Durchmesser eines dreymäßigen Gefäßes von gleicher Höhe, weil A D zwey, A B aber eine Maß; folglich beyde mit einander drey Maß geben.

Es gibt also E B vier, F B fünf Maß u. s. w. Auf diese Art fahre man fort, bis man eine hinlängliche Anzahl Durchmesser aufgezeichnet hat, die man als dann auf Eine Seite eines viereckichten Stabes trägt; auf die andere Seite wird die Höhe des Maßgefäßes so oft aufgetragen, als es nöthig scheint.

Mißt man nun mit diesem Maaßstabe ein zylindrisches Gefäß; so zeigt der Durchmesser-Maaßstab an, wie viele Maße auf der untern Kreisfläche stehen können; das Längenmaaß aber, wie viele Maße auf einander stehen. Man braucht also nur beyde Theile mit einander zu multipliziren; so hat man die Anzahl von Maßen, welche in einem zylindrischen Gefäße enthalten sind. Hat z. B. der Durchmesser eines zylindrischen Gefäßes 6, die Höhe 10 Theile; so hält das Gefäß 60 Maß.

Um ein Faß auszurechnen, muß die Bodenhöhe, und die Spundhöhe addirt, und das Produkt halbirt werden, wodurch man den mittlern Durchmesser erhält, den man mit der Länge des Faßes multipliziren kann. Dieses Verfahren kann aber nach dem, was Seite 204. Nro. 338. gesagt wurde, nur in Fällen angenommen werden, wo keine zu große Genauigkeit erfordert wird. Will man den Inhalt genauer bestimmen; so muß die Hälfte des Faßes nach der

Anmerkung Nro. 338. als ein gestümmelter Kegel berechnet, und das Produkt verdoppelt werden.

347. **Aufgabe.** Maaßstäbe zu verfertigen, womit man verschiedene prismatische Gefäße ausmessen kann.

Will man Gefäße, worin flüßige Materien aufbehalten werden, z. B. Wasserbehälter u. d. gl. ausmessen; so nehme man ein Gefäß mit einem quadratischen Boden, und gieße in dasselbe eine Maß Wasser, trage die Seite des Quadrates von dem Gefäße auf einen viereckichten Stab so oft, als es zum Ausmessen nöthig scheint; wende dann den Stab um, und trage die Höhe des Wassers in dem Gefäße eben so oft auf die andere Seite des Stabes; so gibt dieß einen Maaßstab zum Ausmessen der flüßigen Materien.

Der Gebrauch dieses Maaßstabes ist wieder wie bey dem Vorhergehenden. Man mißt nähmlich mit der Seite des Stabes, worauf die Seite der Grundfläche enthalten ist, die Länge und Breite, das ist, die Grundfläche des Wasserbehälters; und mit der Seite des Stabes, wo die Höhe des Wassers angemerkt ist, die Höhe desselben: so findet man durch die Multiplikation dieser Beyden die Anzahl von Maßen, oder Eimern, welche in dem Behältnisse vorhanden sind.

Es läßt sich leicht einsehen, daß man auf diese Art, Maaßstäbe für das Schäffelmaaß, um Fruchtbehälter auszumessen, und noch andere zu verschiedenem Gebrauche verfertigen könne.

348. **Aufgabe. Das Brenn- und Bauholz auszurechnen.**

Das Brennholz wird in Klaftern nach dem Kubikmaaße verkauft. Die Klafter hält 6′ Höhe und 6′ Breite; die Dicke aber, oder die Scheiterlänge ist nicht überall gleich. Manchmahl hält sie 6′, manchmahl 4′, auch $3\frac{1}{2}$′ und 3′, so wie es in jedem Orte eingeführt ist.

Sind die Scheiter 6′ lang; so erhält man 216^{c}′. Sind sie 4′ lang; so hat man 144^{c}′; sind sie $3\frac{1}{2}$′; so gibt dieß 126^{c}′, und 3′ Länge gibt 108^{c}′.

Da aber beym Aufrichten des Holzes zwischen den Scheitern Raum entsteht; so muß dieser wohl in Betracht gezogen werden. Durch Beobachtung hat man gefunden, daß die Anzahl von Kubikschuhen des Stammholzes sich, wenn es gespalten, und in dem gewöhnlichen Klaftermaaße gemessen wird, um ein Dritttheil vermehret. Es geben also 2^{c}′ Stammholz 3^{c}′ Klafterholz, wo der Raum mitgerechnet ist. Hat man nun einige Stämme, welche z. B. 2340^{c}′ Stammholz geben, und will wissen, wie viel man Kubikschuhe Scheiterholz bekomme; so steht die Rechnung nach obigem Verhältnisse so:

X$^{c'}$ Klafth. 2340$^{c'}$ Stammh.
2$^{c'}$ St. 3$^{c'}$ Kl.

Antw. 3510$^{c'}$ Klafterholz.

Nach der Regel Detri:

Stammh.	Klafth.	Stammh.
2$^{c'}$	3$^{c'}$	2340$^{c'}$

Antw. 3510$^{c'}$ Klafterholz.

Will man nun wissen, wie viel dieß Klaftern ausmache, wenn z. B. die Scheiter 3 $\frac{1}{2}$' Länge haben; so muß die obige Zahl durch 126 dividirt werden; weil eine Klafter zu 6' Länge, 6' Breite, und 3 $\frac{1}{2}$' Dicke, 126$^{c'}$ in sich enthält, wie wir bereits oben gesehen haben. Man erhält also nach vorgenommener Division aus den obigen 3510$^{c'}$ Klafterholz 27 $\frac{108}{126}$ Klafter. Sucht man den Bruch in Viertelsklaftern, welches hinlänglich genau ist; so erhält man 27 $\frac{3}{4}$ Klafter.

Die Stämme sind entweder walzenförmig oder gestümmelte Kegel, und müssen folglich als solche berechnet werden. Bey den letztern gibt nach Vierenklee, die mittlere Kreisfläche multiplizirt mit der Länge den kubischen Inhalt, wie wir bereits Nro. 337. gezeigt haben. Für die Länge wird gleich die Seite des Kegels genommen; weil sich die Axe nicht bequem messen läßt, und der Unterschied dieser beyden Längen keinen beträchtlichen Einfluß auf den Inhalt hervorbringt. Sollte die ebengezeigte Berech-

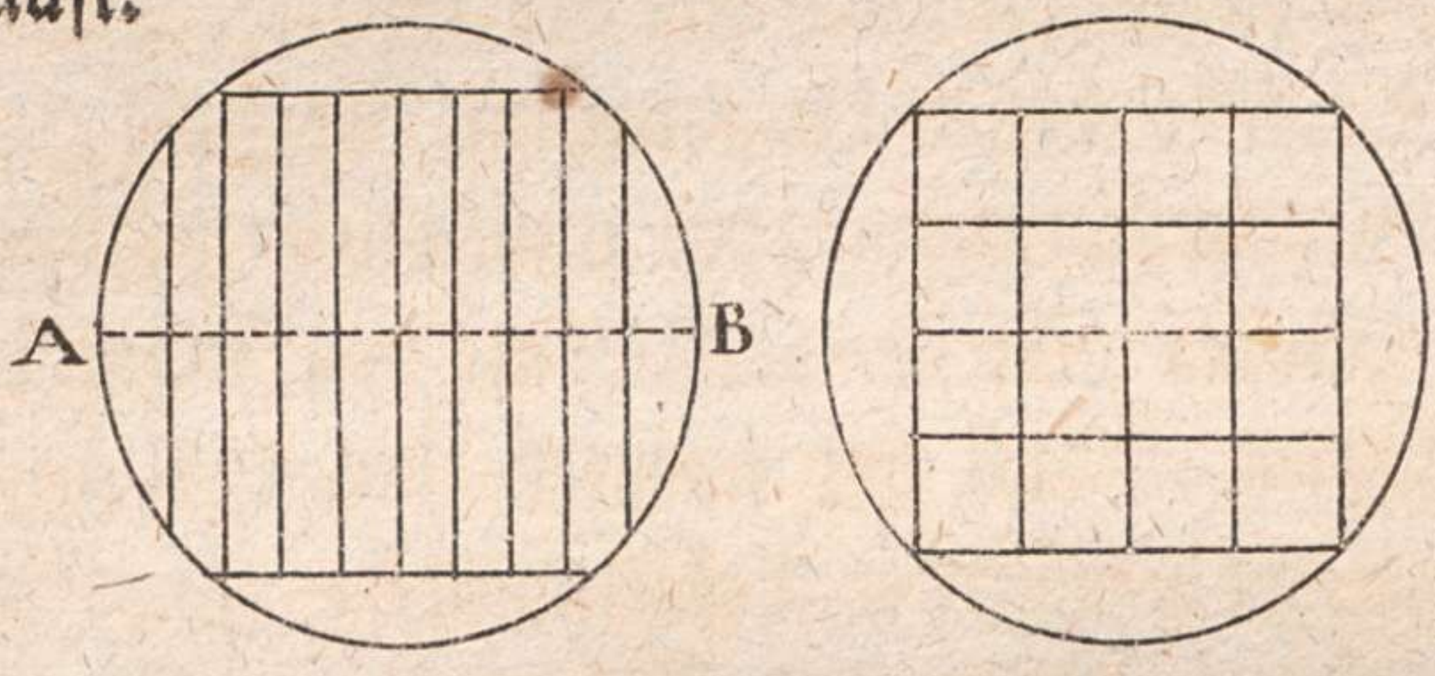
nungsart nicht hinreichend genau befunden werden; so bediene man sich der Nro. 338. angezeigten.

Beyspiel. Wie viel Kubikfuß Holz gibt ein Stamm, dessen Durchmesser am Stammende 2′, am Zopfe 12″ hält, und dessen Länge 30′ zehntheiliges Maaß beträgt.

Macht man alles zu Zollen; so ist nach der ersten oben angezeigten Art der mittlere Durchmesser 16″; dessen Quadrat mit der Zahl 314, dann mit der Länge von 300″ multiplizirt und durch 400 dividirt, gibt $60^{c}/288^{c}$″ als den Inhalt des Stammes. Nach der zweyten Nro. 338. angeführten Art beträgt der Kubikinhalt $61^{c}/544^{c}$″ also den wahren Inhalt des Stammes, welcher also um $1^{c}/256^{c}$″ mehr ausmacht. Dieser Unterschied kömmt bey Holzberechnungen in keinen Betracht. Wo aber die Länge des Stammes sehr vermehrt, und die beyden Durchmesser an ihrer Größe sehr verschieden sind, kann auch der Fehler weit beträchtlicher werden; daher in solchen Fällen die Nro. 338. vorgeschlagene Berechnungsart anzurathen ist.

Das Bauholz wird größten Theils nach den laufenden Schuh, das ist, nach seiner Länge verkauft. Der Werth davon kann also sehr leicht gefunden werden, wenn man den Werth von einem Schuhe weiß.

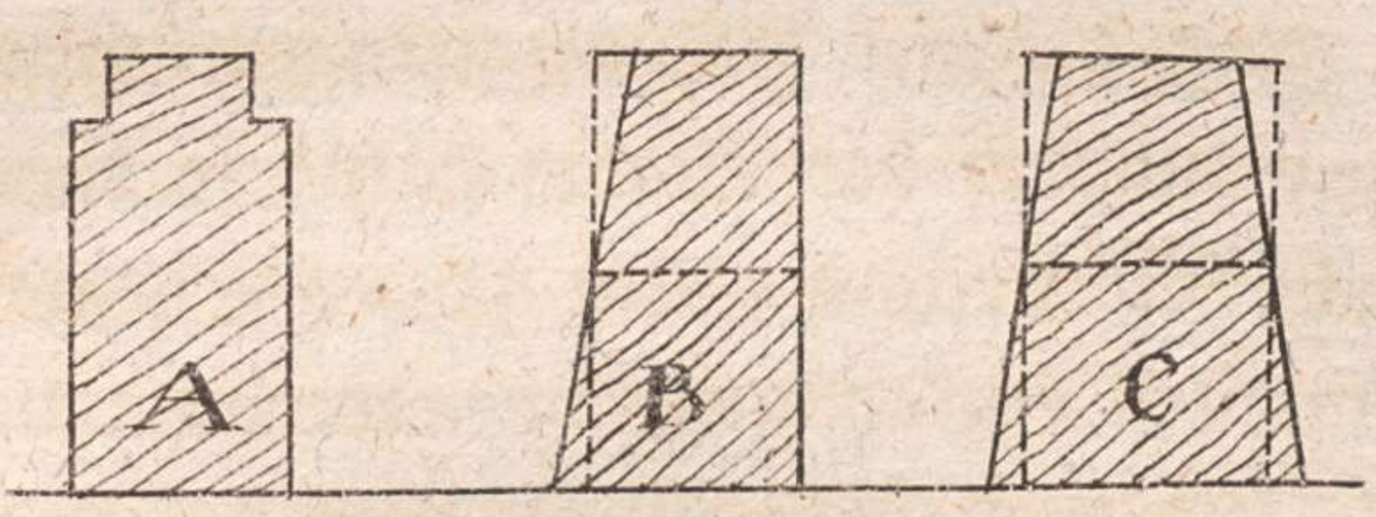
Den Inhalt von zugehauenen Bauhölzern findet man, wenn man die Stämme entweder als Parallellepipeden; oder wenn ihre Seitenflächen gegen eine Spitze zulaufen, als gestümmelte Pyramiden betrachtet. Das übrige Holz, wozu vorzüglich das Blochholz gehört, wird nach der Seltenheit und Schönheit der Stücke auch zu verschiedenen Preisen verkauft.



349. **Aufgabe. Die Anzahl von Brettern, Rigeln und Latten zu finden, welche aus einem Stamme können geschnitten werden.**

Man messe den Durchmesser, und zeichne den Umkreis auf; nehme zu beyden Seiten 2 Zoll für die Schwarten hinweg, fasse die Dicke der Bretter, und $\frac{1}{4}$ Zoll für den Sägeschnitt in den Zirkel, und trage sie auf den Durchmesser A B, so oft es angeht. Auf eine ähnliche Art kann man auch bey Rigeln und Latten verfahren.

350. **Aufgabe. Den kubischen Inhalt von verschiedenen Mauern auszurechnen.**

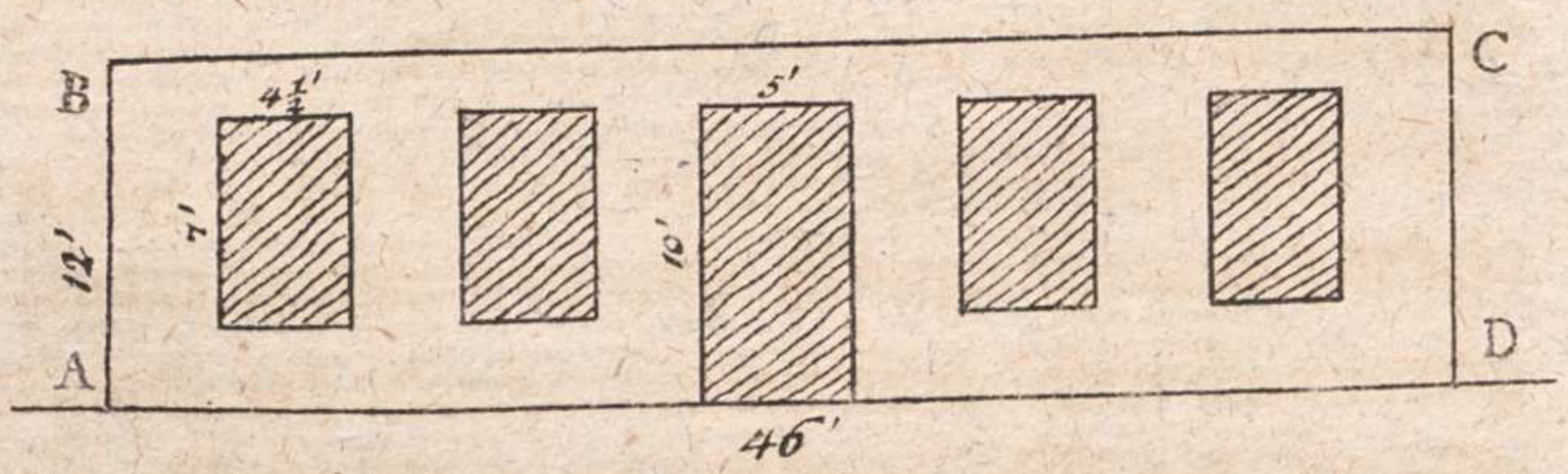


Der größte Theil von Mauern bey Gebäuden besteht aus Parallellepipeden, die entweder aus ihrer Grundfläche und Höhe, oder aus ihrer Durchschnittsfläche und Länge berechnet werden. Mauern mit Böschungen oder Schmiegen, wie B und C lassen sich ebenfalls als Parallellepipeden berechnen; weil ihre Durchschnittsflächen aus Trapezen bestehen, die sich leicht in Parallellogramme verwandeln lassen. Eben so leicht kann der kubische Inhalt von runden Mauern gefunden werden, wenn man ihre Grundflächen, die von zwey Kreisen begränzt sind, ausrechnet, und mit den Höhen der Mauern multiplizirt. Die Art, Gewölbe auszurechnen, wird weiter unten vorkommen.

Die Dicke der Mauer richtet sich, wenn dieselbe von gebrannten Steinen gebaut wird, gewöhnlich nach der Länge und Breite der Mauersteine, die nicht in allen Orten gleiche Maaße haben. Eine Mauer von einem ganzen Mauersteine, welcher in unserer Gegend 14″ Länge 7″ Breite und $2\frac{1}{2}$″ Dicke hält, wäre also vierzehn Zolle dick. Eine Mauer von $1\frac{1}{2}$ Stein würde demnach 21″, und eine von 2 Steinen

28″ Dicke haben. Nimmt man den innern und äußern Anwurf der Mauer dazu; so kann eine einfache Mauer von einem ganzen Steine zu 12 Dezimalzoll Dicke angenommen werden; woraus folgt, daß eine Mauer mit einem halben Steine 6″, eine mit 1½ Steine 18″, mit 2 Steinen 24″, mit 3 aber 36″ Dezimalmaaß Dicke in sich enthält, wodurch der kubische Inhalt solcher Mauern leicht gefunden wird. Die Dicken dieser Mauern sind zwar nicht nach der größten Schärfe angegeben; aber doch zur Berechnung des Materials hinreichend genau; weil man durch das ungleiche Bearbeiten desselben doch nie eine vollkommene Richtigkeit erhalten kann.

Da die Mauern gewöhnlich von einem Stockwerke zum andern in ihrer Dicke abnehmen; so ist man gezwungen, jedes Stockwerk besonders auszurechnen.



Beyspiel. Es soll der kubische Inhalt von den Mauern des untern Stockwerkes eines bürgerlichen Wohngebäudes gefunden werden, welches 46′ Länge, 12′ Höhe hat, und wovon die vordere und hintere Mauer gleiche Einthei-

lung und Dicke, nähmlich 2 Steine oder 24″ Dezimalmaaß enthalten.

Man suche den Quadratinhalt von der ganzen Fläche A B C D, ziehe den Flächeninhalt der Fenster und Thüren davon ab, und multiplizire den Rest mit der Dicke der Mauern; so kömmt der kubische Inhalt hervor.

Es hält also die ganze Fläche A B C D nach den oben bestimmten Maaßen 552□′; der Flächeninhalt der 4 Fenster, wovon die Breite eines jeden 4 ½′, und die Höhe 7′ beträgt, 126□′; die Fläche der Thüre, welche 5′ breit, und 10′ hoch ist, hält 50□′; mithin Fenster und Thüren zusammen 176□′, welche von den obigen 552□′ abgezogen, 376□′ Rest für die Mauerfläche geben. Wird dieser mit 24″ Dicke multiplizirt; so erhält man 902c′, 400c″ Inhalt für die Mauer, wenn sie durchaus gleiche Dicke hat.

Weil die hintere Mauer der vordern in der Größe der Fenster und Thüren gleich ist; so wird der Inhalt doppelt genommen, und die beyden Seitenwände sowohl, als die innern Scheidewände, welche auf die nähmliche Art ausgerechnet werden, dazu addirt, wodurch der Kubik-Inhalt des ganzen Stockwerkes entsteht.

351. **Anmerkung.** Die Schmiegen bey Fenstern und Thüren kommen bey Ausrechnung der Mauern nicht in Anschlag; weil durch das Behauen der Steine eben so viel Material zu

Grunde geht, als man gebrauchen würde, wenn die Pfeiler rechtwinklicht aufgemauert würden.

352. Aufgabe. **Die Anzahl von Mauersteinen zu finden, welche zu einer Mauer oder zu einem ganzen Gebäude erfodert werden.**

Dieses kann bey gebrannten Steinen, die eine gewisse Länge, Breite und Dicke haben, entweder aus den Quadratflächen der Mauern, oder aus ihrem kubischen Inhalte geschehen. **Durch den bloßen Flächeninhalt der Mauer findet man die Anzahl von Mauersteinen,** wenn man zuvor sucht, wie viel eine gewisse Anzahl von Quadratschuhen z. B. $100^{-\prime}$ Steine in sich enthalte.

Weil der gewöhnliche Mauerstein in unserer Gegend 14″ Länge, 7″ Breite, und $2\frac{1}{2}$″ Dicke enthält, und die Steine bey einer einfachen Mauer nach ihrer Breite gelegt werden; so kommen auf eine Linie von $10^{\prime}$, wenn man zu jedem Steine das Mörtelband von einem halben Zoll hinzusetzt, 16 Steine zu stehen. Weil ferners der Stein nach seiner Dicke sammt dem Mörtelbande auf 3″ gerechnet werden kann; so kommen auf eine Linie von $10^{\prime\prime}$, der Höhe nach, 40 Steine zu stehen. Es halten also 10 mahl 10, oder $100^{-\prime}$, 16 mahl 40, das ist, 640 Steine. Mißt man aber eine solche Mauer wirklich; so kommen gewöhnlich wegen der Ungleichheit in der Arbeit nicht so viele Steine heraus. Man

kann daher auf 100 Quadratschuhe 600 Steine bey einer einfachen Mauer von einem ganzen Steine annehmen. Es kommen folglich auf 100□′ einer Mauer mit einem halben Steine die Hälfte, nähmlich 300 Steine; auf eine von 1 ½ Stein, 900 Steine, und auf eine mit 2 ganzen Steinen 1200 Steine u. s. w. Nach diesen Verhältnissen kann also, wenn der Quadratinhalt einer solchen Mauer gegeben ist, die Anzahl der Steine leicht berechnet werden. Diese Art läßt sich überall anwenden, wo die Dicke der Mauer sich nach der Länge oder Breite der Steine richtet. Da die Kaminsteine bey uns ebenfalls 14″ Länge, und 2 ½″ Dicke haben, und mit diesen nur nach dem halben Steine gemauert wird; so geben 100□′ Kaminmauer ebenfalls 300 Kaminsteine.

Um die Anzahl der Steine aus dem kubischen Inhalte der Mauern zu finden; muß vor Allem wieder ein Verhältniß zwischen einer gewissen Anzahl von Kubikschuhen, und einer Anzahl von Steinen gesucht werden. Macht man die obigen 100□′ einer einfachen Mauer mit der Länge der Steine von 14″, anstatt welcher man wegen Anwurf, und Ungleichheit der Arbeit 12 Dezimalzolle nehmen kann, so erhält man 120c′. Weil also 120c′ 600 Steine geben; so geben 20c′, 100 Steine. Aus diesem Verhältnisse kann wieder, wenn der Kubik-

Inhalt einer Mauer bekannt ist, die Anzahl der Mauersteine leicht gefunden werden. Diese Art der Berechnung läßt sich vorzüglich da gebrauchen, wo die Mauerdike nicht nach der Länge oder Breite der Steine, sondern auch der Anzahl von Schuhen, und Zollen gegeben ist.

Der kubische Inhalt der Mauern ist auch dann nöthig, wenn mit Bruchsteinen gemauert wird. Die Bruchsteine werden in den Stein-Brüchen zu verschiedenen Maaßen oder Kubikklaftern verkauft. Ein Maaß solcher Steine zu 16 Schuh Länge und Breite, und 2 Schuh Dicke gibt $512^{c\prime}$, welche aber der Erfahrung gemäß nur $350^{c\prime}$ Mauer geben. Hieraus kann wieder die Anzahl von Bruchsteinen für eine Mauer berechnet werden.

Beyspiel. Es halte eine Mauer $6420^{c\prime}$; wie viel wird man Maaße Bruchsteine zu 16′, Länge und Breite, und 2′ Dicke brauchen?

X Maaße	$6420^{c\prime}$
$350^{c\prime}$	1 Maaß.

Antw. $18\frac{1}{3}\frac{2}{5}$ Maaß.

Nach der Regel Detri:

Mauer,	Maaß	Mauer?
$350^{c\prime}$	1	$6420^{c\prime}$

Antw. $18\frac{1}{3}\frac{2}{5}$ Maaß.

Ist das Maaß der Bruchsteine von dem obigen verschieden, z. B. 15′ Länge und Breite,

und 2′ Dicke; so geben diese 450c′ Bruchsteine. Es wird also auch hier die Anzahl dieser Maaße nach dem obigen Verhältnisse gefunden.

Beyspiel. Wie viel Maaße Bruchsteine braucht man zu einer Mauer von 6420c′, wenn ein Maaß 15′ Länge und Breite, und 2′ Dicke oder 450c′ hält.

Man suche zuvor die Anzahl von Kubik-Schuhen der rohen Bruchsteine, welche zur Aufführung einer solchen Mauer nöthig sind auf folgende Art:

Xc′ Bruchst.	6420c′ Mauer.
350c′ Mauer.	512c′ Bruchst.

Antw. 9391 $\frac{1}{3}\frac{9}{5}$c′ Bruchst.

Nach der Regel Detri:

Mauer,	Bruchst.	Mauer?
350c′	512c′	6420c′

Antw. 9391 $\frac{1}{3}\frac{9}{5}$c′ Bruchst.

Diese Zahl mit Hinweglassung des Bruches durch 450c′ dividirt, gibt $20\frac{3}{4}\frac{9}{5}\frac{1}{0}$ Maaße.

353. **Aufgabe. Die Menge von Kalk und Sand zu finden, welche zu einer Mauer oder einem Gebäude nöthig ist.**

Man hat durch die Beobachtung gefunden, daß man zu 1000 gebrannten Steinen vom obigen Maaße, eine Muth Kalk und 4 Fuhren Sand zu 2 Pferden nöthig hat; womit aber auch der Anwurf eingerechnet ist. Weiß man also, wie

viele tausend Steine zu einem Gebäude nöthig sind; so ist auch die Menge von Kalk und Sand bekannt. In Orten, wo die Maaße der Steine verschieden sind, muß auch die Beobachtung besonders gemacht werden. Bruchsteine bedürfen mehr Kalk und Sand, als gebrannte Steine; weil sie sich nicht so genau aneinander legen lassen. Da sich aber dieses nach der Größe der Stücke richtet, die vermauert werden sollen: so kann man von einer Muth Kalk eine Mauer aufführen lassen, und ihren kubischen Inhalt berechnen, wodurch man finden wird, wie viel eine Muth Kalk Kubikschuhe Mauer gibt. Nach diesem Verhältnisse richtet man sich in der Folge Durchgehends.

354. **Aufgabe. Die Anzahl der Tage, in denen eine Mauer kann aufgeführt werden und das Taglohn der Maurer zu berechnen.**

Man rechnet auf einen Maurer des Tages 200 Steine zu vermauern, zuzuhauen und zu verputzen. Hat man also die Anzahl von Steinen, die zu einer Mauer nöthig ist; so kann man aus selben die Anzahl der Tage, und daraus auch das Taglohn der Maurer berechnen.

355. **Aufgabe. Den Kubik-Inhalt der Erde zu finden, die bey den Grundmauern oder Kellern ausgegraben wird.**

Man

Man suche die Oberfläche des Grabens, und multiplizire sie mit der Tiefe desselben.

Weiß man, wie viele Kubikschuhe ein Mann des Tages ausgräbt; so kann wieder die Anzahl der Tage, und der Kostenbetrag ausgerechnet werden. Dabey hat man aber zu bemerken, daß die Arbeit in der Tiefe bey weiten nicht so geschwind von statten gehe, wie auf der Oberfläche, und daß gewöhnlich ein Theil der Seitenwände beym Ausgraben mit in die Tiefe fällt, der die Menge des auszugrabenden Erdreichs vermehrt. Das feste Erdreich verhält sich zum lockern, welches ausgegraben wird, wie 10 zu 17; oder $10^{c\prime}$ feste Erde geben $17^{c\prime}$ lockere.

356. **Aufgabe. Die Anzahl von Dach-Platten zu finden, die zu einem Ziegeldache nöthig sind.**

Weil die Latten bey einem solchen Dache einen halben Schuh weit auseinander zu stehen kommen; so liegen auf einer Linie von 10 Schuhen der Höhe nach 20 Dachplatten. Weil ferners eine Platte in unserer Gegend $8''$ Breite hält, so kommen auf 10 Schuhe, 15 Platten der Breite nach, zu stehen. Es halten daher $100'$ 15 Mahl $20'$, das ist 300 Platten, folglich $1''$ 3 Platten. Um also ihre Anzahl zu einem Dache zu finden, braucht

man nur den Inhalt desselben in Quadratschuhen zu suchen, und ihn mit 3 zu multipliziren.

Aus der Anzahl der Dachplatten, kann wieder die zum Aufhängen derselben nöthige Anzahl von Latten gefunden werden.

Denn, haben z. B. die Latten in ihrer Länge 20′, so kommen auf eine Latte 30 Dachziegel zu stehen. Dividirt man also die Anzahl der Dachziegel durch 30; so kömmt die dazu nothige Anzahl von Latten zum Vorschein.

357. Aufgabe. Die Anzahl des zu einem Dachstuhle nöthigen Bauholzes zu bestimmen.

Weil die Balken oder Trame gewöhnlich 3 Schuhe auseinander liegen, und an den beyden Enden einer liegen muß, so wird die ganze Länge des Gebäudes mit 3 dividirt, und 1 addirt, wodurch die Anzahl der Balken hervorgeht. Die Zahl der Rafen oder Sparren ist doppelt so groß, als die der Balken, zu welchen noch die beyden Mauerbänke hinzu kommen. Hat das Dach Kehl-Balken oder Spitzbänder; so ist ihre Anzahl eben so groß, als die Anzahl der Balken. Befindet sich in dem Dache ein liegender oder stehender Stuhl; so richtet sich auser den Schwellen und Pfetten die Anzahl der Säulen, und der dazu gehörigen Spannriegel, Schwenk- und Kreuzbüge, nach der Anzahl der Balken; indem meisten Theils nach vier

Balken wieder ein Bund zu stehen kömmt. Bey den Walme-Dächern ist außer den Grad-Sparren die Menge des Holzes nicht beträchtlich verschieden. Die Länge der Hölzer wird durch Aufzeichnung eines Lehrgesperres auf dem verjüngten Maaßstabe gefunden; so wie sich überhaupts aus der Zeichnung des Werksatzes, und Lehrgesperres, eines jeden Dachwerkes die Anzahl der Hölzer, aus diesen der Arbeitslohn, und der ganze Kosten des Daches am leichtesten bestimmen läßt.

358. Aufgabe. Die Anzahl von Brettern oder Tafeln zu bestimmen, die zur Bedeckung eines Bodens nöthig sind.

Man rechne den Quadratinhalt einer Tafel aus, und dividire ihn in den Quadratinhalt des ganzen Bodens.

Eben so wird auch die Anzahl von Marmor und andern Steinplatten gefunden, die zur Pflasterung eines Bodens nothwendig sind, wenn man den Quadratinhalt von einer Platte in den des Bodens dividirt.

Die Anzahl von Latten zu einer Decke oder einem Rohrboden erhält man ebenfalls durch die Division des Flächeninhalts einer Latte mit ihrem zugehörigen Zwischenraume in den des Rohrbodens.

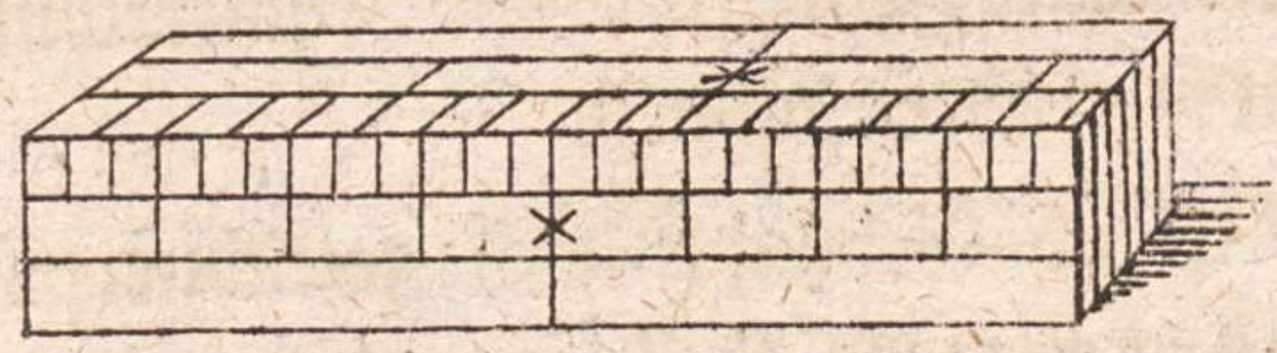
359. **Um die Menge des Mörtels, wel=** cher aus einem Theile Kalk und drey Theilen Sand besteht, zu finden, die zu einer Decke nöthig ist, muß man zuvor beobachten, wie viel zu einer gewissen Anzahl von Quadratschuhen gebraucht wird, und von dieser auf den Qua= dratinhalt der Decke schließen.

360. **Die übrigen Theile des Gebäudes,** als Fensterrahmen, Thüren, Schmied = Schlos= ser = und Glaser = Arbeit, werden an die verschie= denen Handwerksleute für bestimmte Bezahlung verdingt. Aus diesem Ganzen entsteht der Kosten= Ueberschlag eines Gebäudes, dem man aber, um alle unvorhergesehenen Fälle bestreiten zu können, noch einen sechsten Theil aller Kosten zugibt.

361. **Anmerkung.** Weil in einigen Or= ten das Klaftermaaß zu 6′, und in andern die Ruthe zu 12′ Länge eingeführt ist; so hat man hier bloß alles in Schuhen anzeigen wollen, wor= aus nach Bedarf die Klaftern und Ruthen leicht können gezogen werden. Die Quadrat = und Kubikrechnung wird sonst in Baugeschäften auch nach dem zwölftheiligen Maaße angewendet. Um den beständigen Reduktionen, die dieses Maaß verursacht, auszuweichen, hat man die Toisir= oder Klafterrechnung eingeführt, die in geklaf= terten Schuhen und Zollen geschieht. In den Orten, wo nach Ruthen gerechnet wird, ge= schieht dieß in Riemenruthen, Riemenschuhen ꝛc.

Da diese Rechnungsarten nicht überall aleich sind, und vielerley Regeln erfordern; in den öffentlichen Schulen auch seltner gelehrt werden: so hat man sich bewogen gefunden, die Dezimal-Rechnung wegen ihrer Leichtigkeit und Einfachheit für alle geometrischen Vorfälle beyzubehalten.

Damit man aber die vorkommenden Bau-Rechnungen in allen Fällen mit der gehörigen Leichtigkeit führen könne; so ist vor Allem nothwendig, daß man sich auf einem Stabe den landesüblichen Werkschuh genau in seine 12 Zolle, und jeden Zoll wieder in 12 Linien eintheile. Auf die daran stossende Seite dieses Stabes theile man den nähmlichen Schuh in 10 Zolle, und jeden Zoll wieder in 10 Linien nach Art der beyliegenden Zeichnung, welche die Eintheilung von 2 Zollen beträgt.



Auf diesem Maaßstabe kann man ohne Rechnung finden, wie viel im Längenmaaße eine gewisse Anzahl Dezimalzolle und Linien im bürgerlichen Maaße beträgt. Läßt man im Quadratmaaße die Linien Zolle gelten; so findet man auch die Quadratzolle des Dezimalmaaßes im bürgerlichen Maaße durch die gegenüber stehenden Li-

nien auf dem Stabe. Weil die Kubikzolle nach einer vollendeten Materialberechnung selten einen Ausschlag geben, und daher von keiner Wichtigkeit sind; so kömmt auch ihre Reduktion in keinen Betracht.

Sind in der Berechnung des Materials die Theile eines Gebäudes im zwölftheiligen Maaße nach ihrer Länge, Breite und Dicke gegeben; so sehe man nur auf dem Stabe, wie viel diese Maaße im Dezimalmaaße betragen. Dabey mache man sich zur Regel, nur in Schuhen und Zollen zu rechnen, und alle Linien, die weniger als einen halben Zoll betragen, zu verwerfen; diejenigen aber, welche mehr als einen halben Zoll betragen, als einen ganzen Zoll anzunehmen, welches wegen des unbedeutenden Ausschlages, den sie auf das Materiale geben, ohne Anstand geschehen kann. Auf diese Art wird man die Quadrat- und Kubikrechnung sehr leicht fortführen können.

Sind Gebäude nach gezeichneten Plänen zu berechnen; so theile man den dabey befindlichen Schuh in zehn Theile, und nehme die Maaße auf diesem Maaßstabe ab.

362. **Anmerkung.** Obschon die Geometrie hinreichend gewesen wäre, die bisherigen Aufgaben über Baugegenstände ohne weitere Erklärung aufzulösen; so hat man sich doch zum Nu-

tzen der Anfänger etwas weiters darüber ausdehnen wollen.

Sollten die obigen Berechnungen nach dem neuen französischen Maaße bewerkstelliget werden; so kann dieses, weil das Maaß zehntheilig ist, eben so wenig Schwierigkeit verursachen.

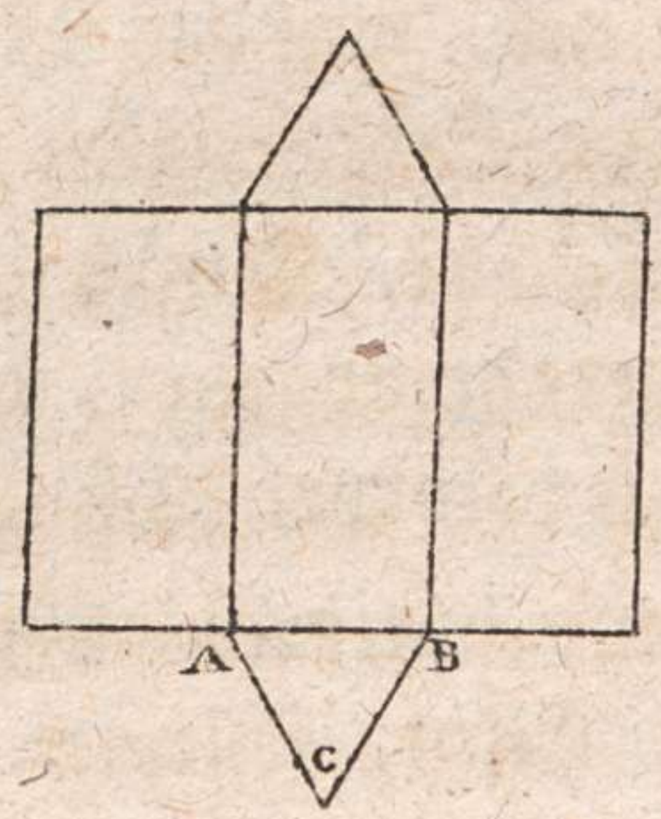
363. **Aufgabe. Durch die Kubikrechnung die Schwere homogener, das ist, durchaus gleichartiger Körper zu finden.**

Man nehme einen prismatischen Körper von Holz, Stein, Eisen, Bley ꝛc., rechne seinen Kubikinhalt aus, wiege ihn genau, und suche darnach das Gewicht eines Kubikschuhes; so hat man das Verhältniß, aus welchem man das Gewicht von mehreren Kubikschuhen finden kann. Diese Berechnung kann in vielen Fällen zur Bestimmung der Lasten für das Fuhrwerk gute Dienste leisten.

Entwicklung der Oberflächen der Körper, oder Zeichnung der Körpernetze.

364. **Erklärungen.** Wenn die Flächen, die einen Körper umgeben, so aneinander hangend dargestellt werden, daß sie bey einer richtigen Zusammenbeugung einen hohlen Körper bilden, so nennt man diese Zeichnung das

Netz eines Körpers. Diese Netze dienen theils hohle Körper zusammen zu setzen, theils auch andere mit dünnen Körpern zu überziehen, oder verschiedene Zeichnungen auf ihre Oberflächen zu bringen.

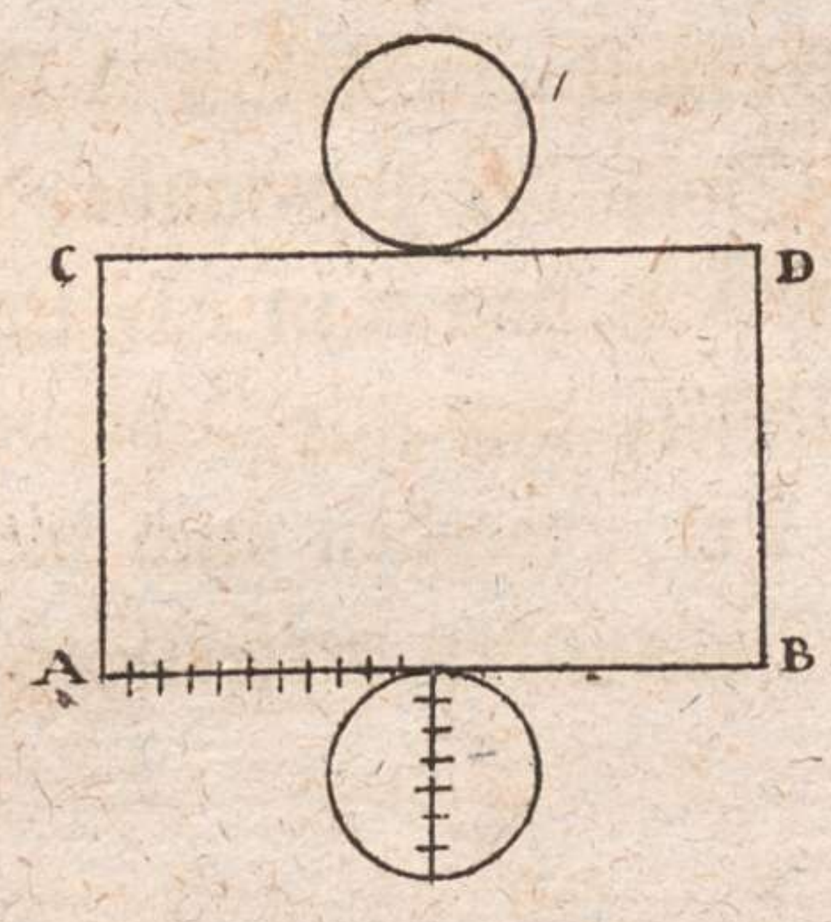


365. Aufgabe. Das Netz zu einem senkrechten Prisma zu zeichnen.

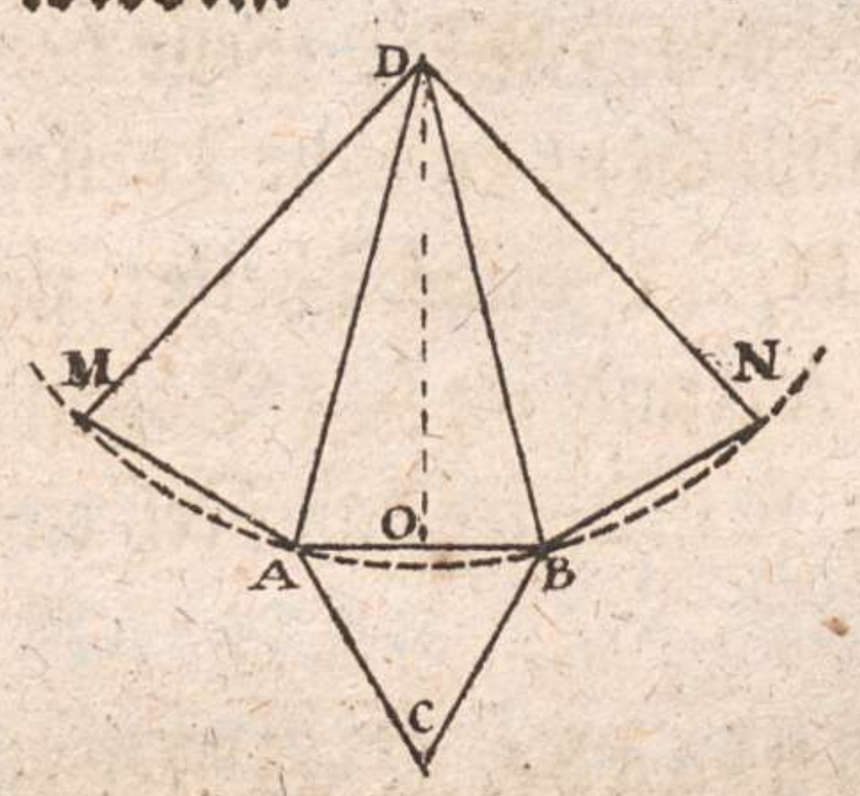
Man macht zuvor die Grundfläche A B C, hier ein gleichseitiges Dreyeck, und erhebt aus A B zwey senkrechte Linien, denen man die Höhe des Prisma gibt; an diese zeichnet man die übrigen Seiten des Prisma nach der Anzahl der Seiten in der Grundfläche, und hängt die obere Fläche daran: so lassen sich diese Flächen zu einem hohlen Körper zusammen biegen, undbilden ein Prisma.

Die Netze zu Parallelepipeden, und vieleckichten Prismen, werden auf eine ähnliche Art verfertiget.

366. Aufgabe. Das Netz zu einer senkrechten Walze zu zeichnen.



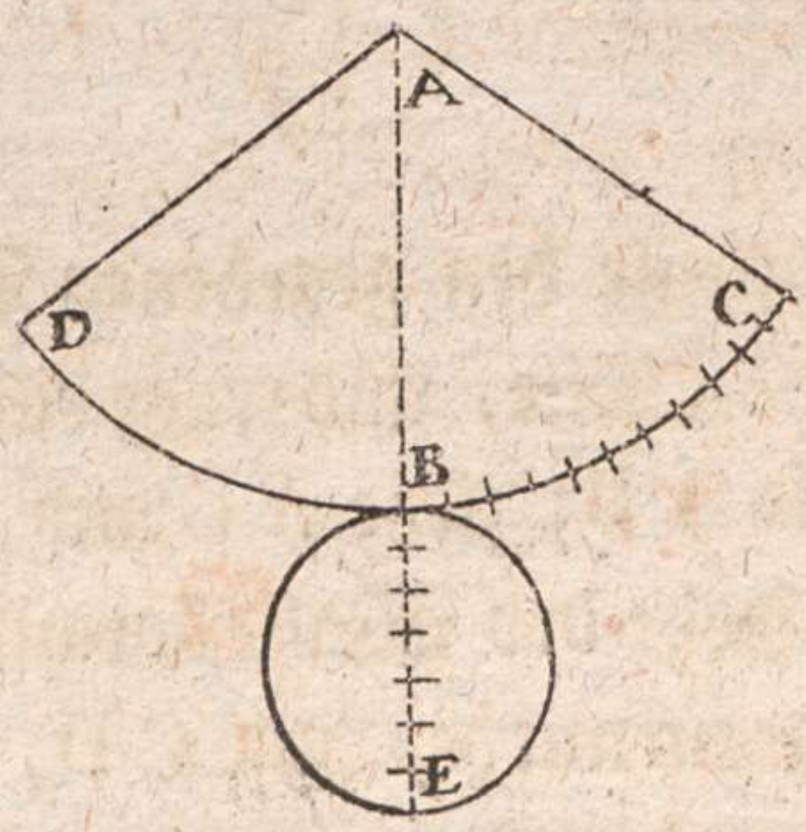
Man theile den gegebenen Durchmesser in sieben gleiche Theile, und trage davon 22 auf eine gerade Linie A B; ziehe A C und B D senkrecht; trage die Höhe der Walze darauf; schließe das Parallellogram mit der Linie C D, und hänge unten und oben die Kreisflächen nach dem gegebenen Durchmesser daran. Der Umkreis A B kann auch nach dem gegebenen Durchmesser durch Rechnung gefunden, und nach dem Maaßstabe aufgetragen werden.



367. **Aufgabe. Das Netz zu einer dreyeckichten senkrechten Pyramide zu machen.**

Wenn man die Grundfläche A B C verfertigt hat: so trägt man die Höhe einer Seite

von O nach D, und macht mit A D einen Bogen aus der Spitze der Pyramide, auf welchen man die Länge A B von A in M, und B C von B in N abschneidet, und mit D verbindet. Auf eine ähnliche Art, werden auch die Netze von mehrseitigen Pyramiden verfertiget.

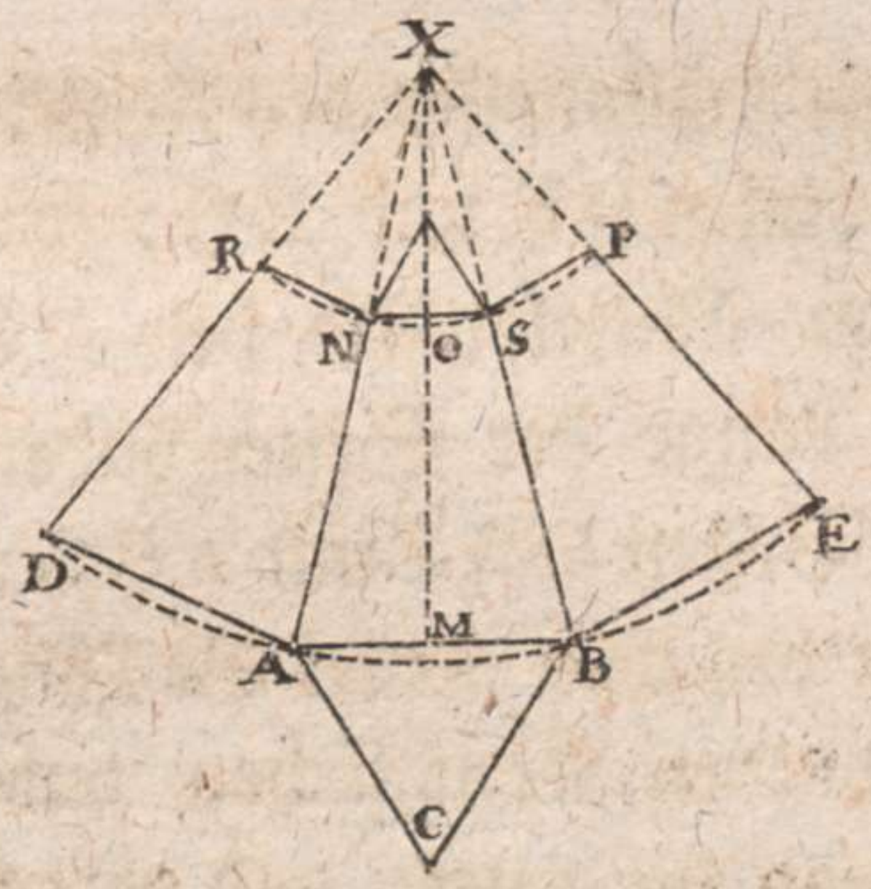


368. **Aufgabe. Das Netz eines senkrechten Kegels zu zeichnen.**

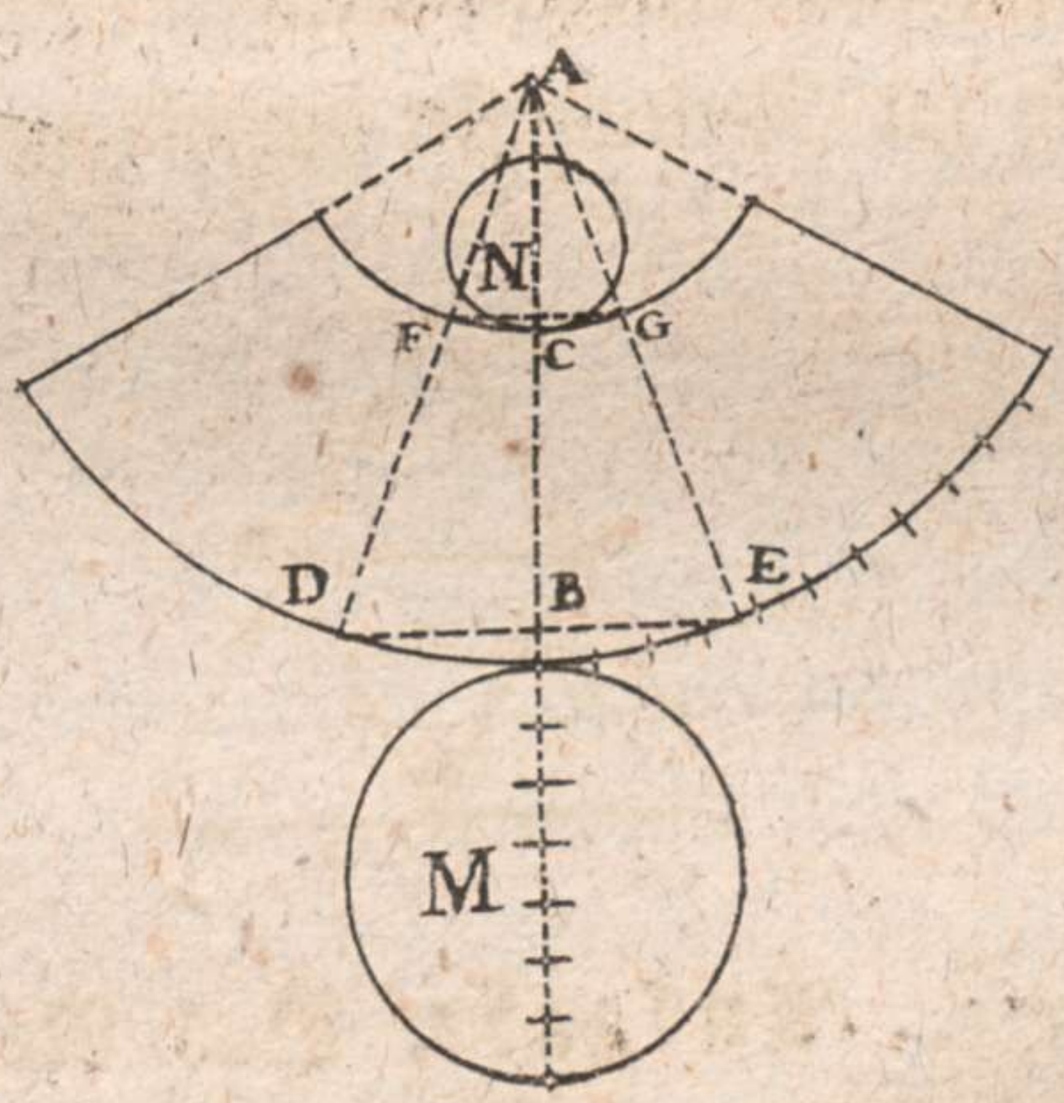
Man trage die Länge von der Seite des Kegels auf eine Senkrechte A B, und mache damit einen Bogen C B D; theile den Durchmesser der Grundfläche in 7 gleiche Theile; trage von B nach C und D, 11 solche Theile; ziehe die Linien C A und D A, und an den Bogen die Grundfläche B E; so ist dieses das Netz eines senkrechten Kegels.

369. **Aufgabe. Das Netz einer gestümmelten senkrechten Pyramide zu verfertigen.**

Man mache die Grundfläche A B C, trage die Länge einer Seite von M nach O, und ziehe nach der Linie N S das obere ähnliche Drey-



eck; verbinde A N und B S mit Linien, die man verlängert, bis sie sich bey X durchschneiden; aus dem Punkte X mache man mit X A die Bogen D A B E, und R N S P; trage die Seiten der beyden Dreyecke darauf, und verbinde sie mit Linien.

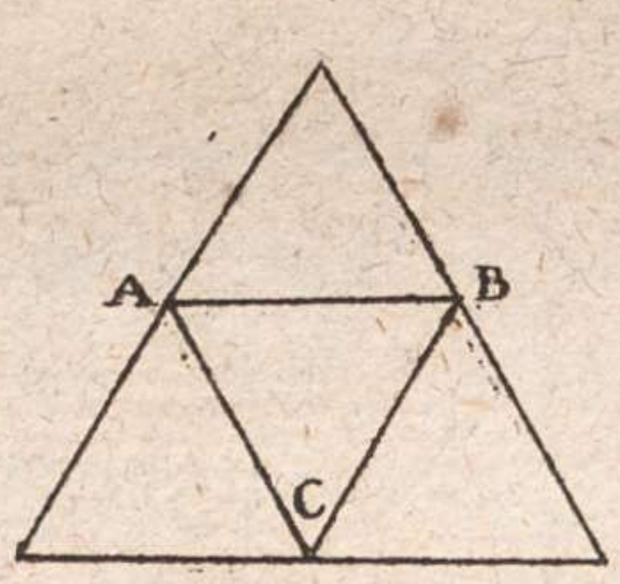


370. **Aufgabe. Das Netz eines gestümmelten senkrechten Kegels zu verfertigen.**

Man ziehe eine gerade Linie A B, trage von B nach C die Höhe von der Achse des gestümmelten Kegels, und aus B nach D und E die Halbmesser des größern, aus C nach F und

G aber die Halbmesser des kleinern Kreises, und ziehe die Linien D F und E G: so werden sich diese in dem Mittelpunkte bey A durchschneiden, und die Länge der Seiten bilden, mit welchen man die Bogen D B E und F C G ziehen kann, die wie oben bey dem Kegel die Länge des Umkreises der beyden Kreisflächen haben müssen, an welche man die untere und obere Kreisfläche M und N anhängt.

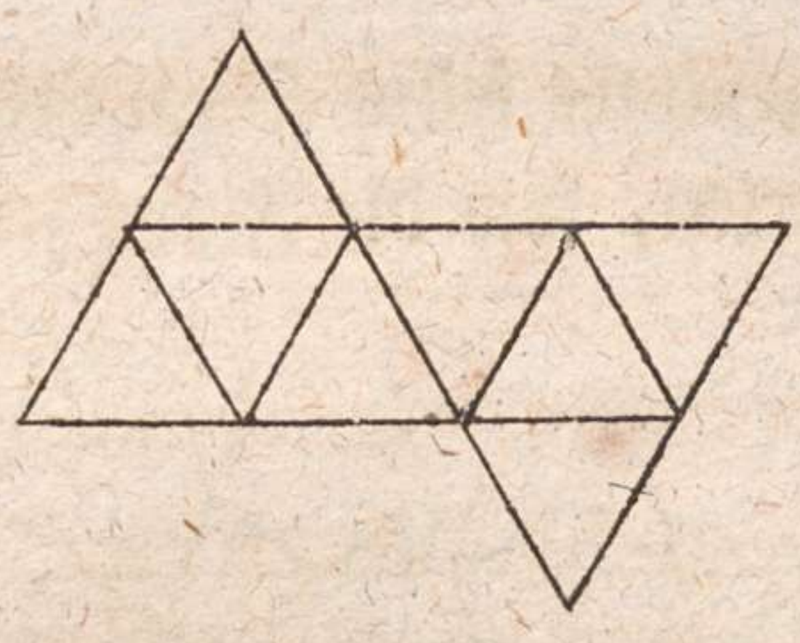
Die Ursache dieses Verfahrens sieht man leicht ein, wenn man betrachtet, daß zwey aus den Endespunkten der beyden Durchmesser eines gestümmelten Kegels gezogene Linien sich nothwendig im Mittelpunkte durchkreuzen müssen.



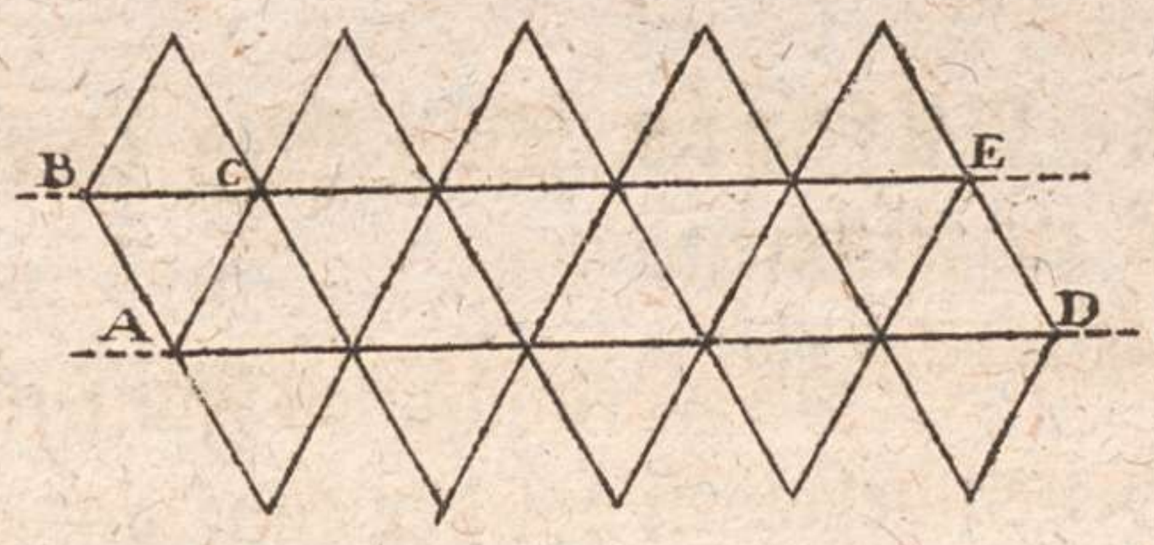
371. **Aufgabe. Das Netz zu einem Tetraedrum zu machen.**

Man ziehe ein gleichseitiges Dreyeck A B C, und an jede Seite desselben ein anderes von gleicher Größe.

372. **Aufgabe. Das Netz eines Oktaeders zu verfertigen.**

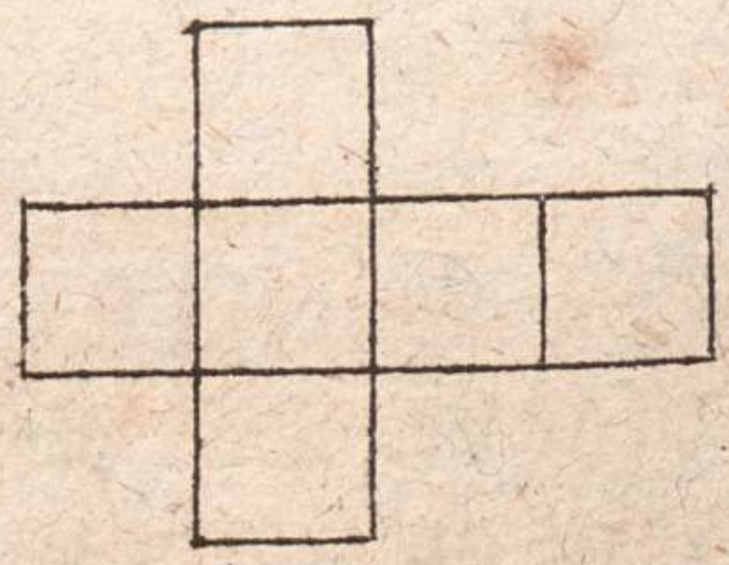


Man mache zwey zusammen hangende Netze eines Tedraeders auf die Art, wie die Figur zeigt.



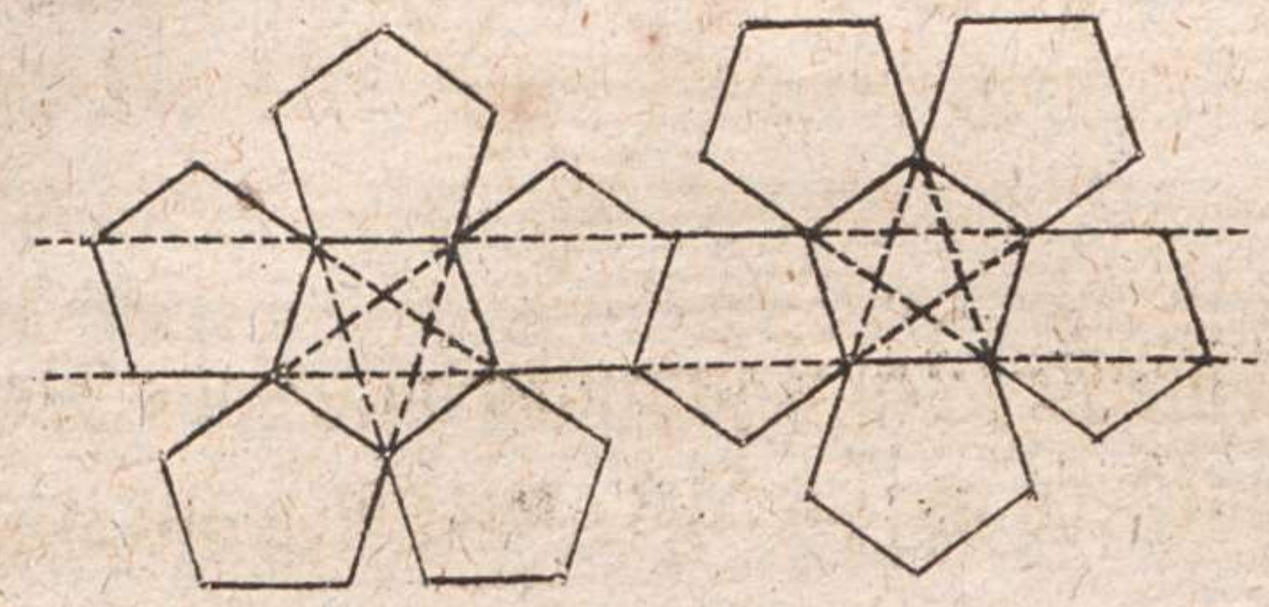
373. **Aufgabe. Das Netz eines Ikosaeders zu zeichnen.**

Da dieses aus zwanzig gleichseitigen Dreyecken besteht, so wird zuvor ein Dreyeck A B C gezeichnet, und die Parallellinien A D und B E nach der Höhe des ersten Dreyecks gezogen, wo sich dann die übrigen Dreyecke nach Art der beystehenden Fig. durch Parallellinien ergeben.



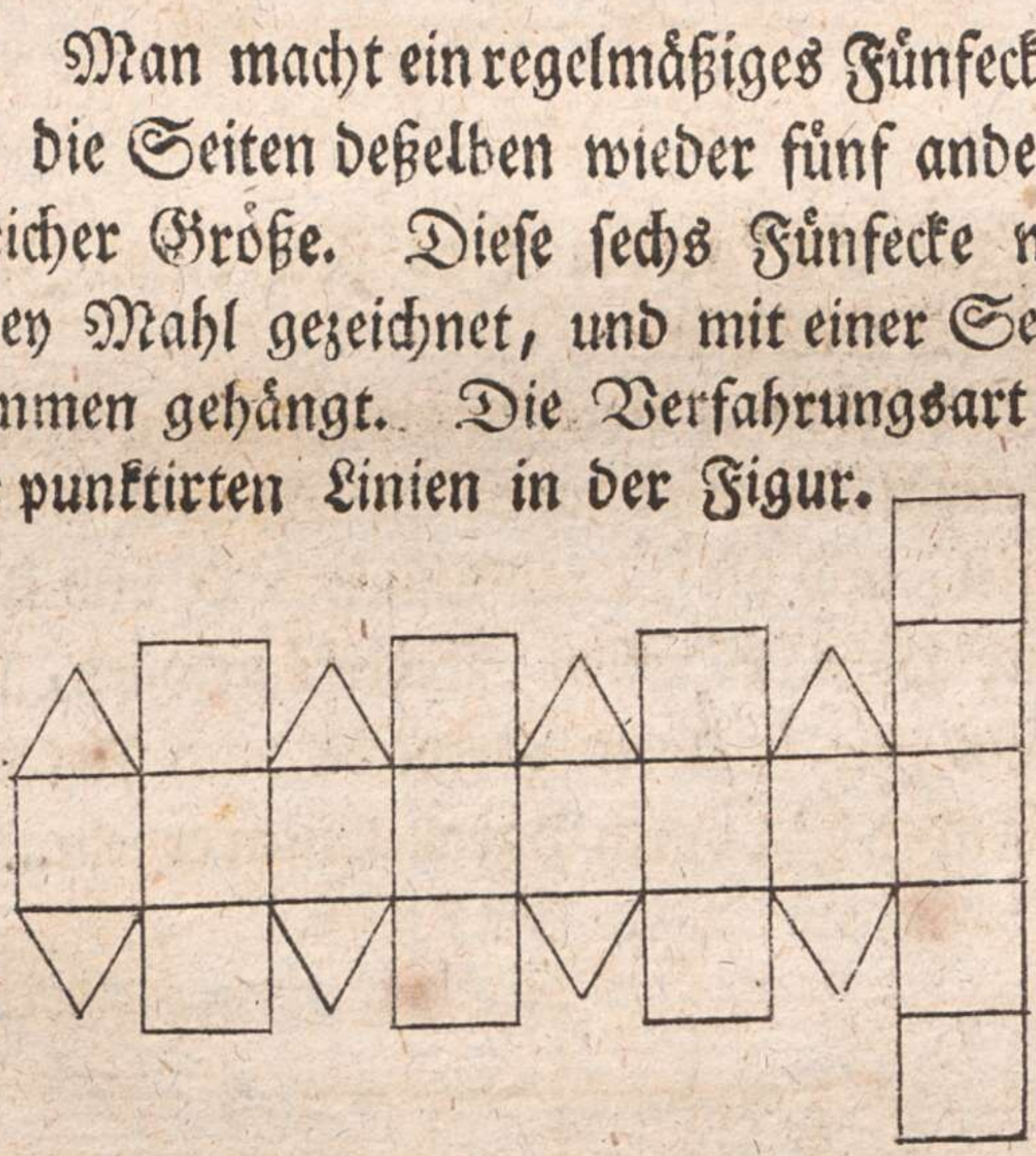
374. **Aufgabe. Das Netz eines Würfels zu verfertigen.**

Man zeichnet sechs Quadrate, und hängt sie so zusammen, wie die Figur zeigt.



375. **Aufgabe. Das Netz eines Dodekaeders zu zeichnen.**

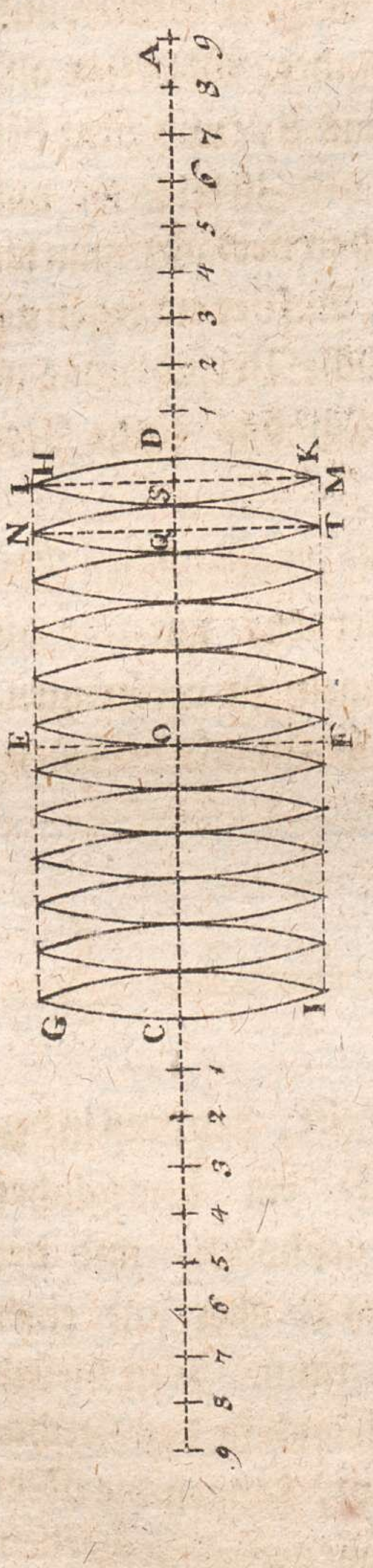
Man macht ein regelmäßiges Fünfeck, und an die Seiten deßelben wieder fünf andere von gleicher Größe. Diese sechs Fünfecke werden zwey Mahl gezeichnet, und mit einer Seite zusammen gehängt. Die Verfahrungsart zeigen die punktirten Linien in der Figur.



376. **Aufgabe. Das Netz des archimedischen Körpers zu zeichnen.**

Da dieser aus 18 gleichen Quadraten besteht, so zeichne man dieselben alle aneinander

hangend, und auf diese die 8 Dreyecke, wie die Figur zeigt.

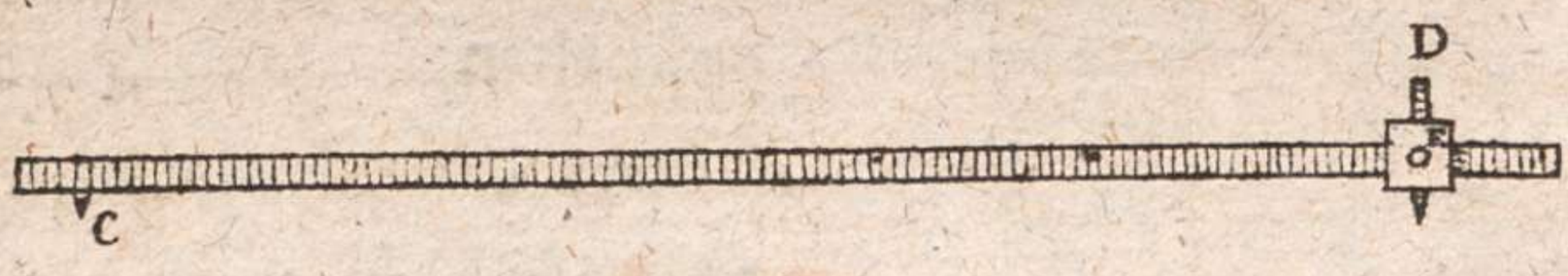


377. Aufgabe.
Das Netz zu einer Kugel zu zeichnen, wovon der Durchmesser gegeben ist.

Man theile den Durchmesser in 7 gleiche Theile, und trage 22 derselben auf die Linie C D; so stellt diese den Umkreis vor. Will man lieber den Umkreis durch Rechnung finden; so kann dieses hier wie bey der Walze und dem Kegel geschehen. Die Linie CD wird durch die Senkrechte EF in zwey gleiche Theile getheilt, die halbe Länge von O C nach E und F getragen, und die beyden Parallellinien G H und I K gezogen. Man theilet dann die Linie C D in 12 gleiche Theile, und macht wieder von jedem

die Mittellinien L M, N T u. s. w. Von D gegen A werden neun gleiche Theile in der Länge der Linie S D aufgetragen, wo sich dann der Mittelpunkt des Bogens M S L in A befindet. Man setzt also den Zirkel in A, öffnet ihn bis S, und zieht den Bogen M S L; setzt ferners den Zirkel in 8, und macht den Bogen T Q N, und so verfährt man bis alle 12 Bogen verfertigt sind. Auf der entgegen gesetzten Seite wird die nähmliche Verfahrungsart beybehalten, wodurch endlich das ganze Netz entsteht.

Anmerkung. Da die gewöhnlichen Zirkel nicht hinreichend seyn werden, um nur die Netze für mittelmäßige Kugeln zu verfertigen; so kann man sich des **Stangenzirkels** bedienen, welcher hier abgebildet ist.



Bey C ist ein spitziger Stift, den man in den Mittelpunkt einsetzt; bey D ein bewegliches Holz, welches auf und ab geschoben, und der Bleystift durchgesteckt, bey E aber mit einer Schraube festgestellt werden kann. Mit diesem Instrumente, dessen man sich auch in der Mechanik bey großen Kreisen bedient, können die Netze der Kugeln nach beliebiger Größe gezeichnet werden.

Von

Von der Ausrechnung der Ober-Flächen der Körper.

379. **Erklärung.** Die Netze geben einen deutlichen Begriff von den Flächen, mit welchen die Körper umgeben sind. Werden die einzelnen Flächen ausgerechnet, und zusamm n addirt, oder wenn sie alle gleich sind, nur eines ausgerechnet, und mit der ganzen Anzahl multiplizirt; so erhält man den Flächeninhalt von der Oberfläche eines Körpers.

380. **Aufgabe.** Den Inhalt der Oberflächen von senkrechten Prismen, Walzen, Pyramiden und Kegeln zu finden.

Weil das Prisma von lauter Parallelogramen, und 2 Grundflächen eingeschlossen ist; so suche man den Flächeninhalt eines solchen Parallellograms, multiplizire ihn mit der Anzahl derselben, und addire die untere und obere Fläche dazu.

Die Oberfläche der Walze besteht aus einem Parallelograme, das die Peripherie zur Grundlinie, die Höhe der Walze aber zur Höhe hat, und aus der obern und untern Kreisfläche. Sie kann also als ein Parallelogram ausgerechnet, und zu dem Produkte die Summe der beyden Kreisflächen addirt werden. Weil aber die Kreisfläche nach Seite 128. Nro. 228. erhalten wird, wenn man den halben Theil des Halb-

messers mit dem Umkreise multiplizirt, folglich die beyden gleichen Kreisflächen aus der Multiplikation des ganzen Halbmessers, multiplizirt mit dem Umkreise, bestehen; so erhält man die Oberfläche einer senkrechten Walze am bequemsten, wenn man den Halbmesser zur Höhe der Walze addirt, und die Summe mit dem Umkreise multiplizirt.

Die Oberfläche der Pyramide besteht aus lauter Dreyecken, und aus der Grundfläche; man sucht also den Inhalt von einem Dreyecke, multiplizirt ihn mit der Anzahl derselben, und addirt zu dem Produkte die Grundfläche.

Die gebogene Oberfläche des Kegels besteht aus lauter unendlich kleinen Dreyecken, von welchen die gesammte Grundlinie der Umkreis, und die Höhe die Länge der Seite ist. Es muß also der Umkreis mit der Länge der Seite multiplizirt, und das Produkt durch 2 dividirt werden, wozu noch die Grundfläche kommt. Weil aber auch die Grundfläche aus der Multiplikation des Umkreises mit dem Halbmesser dividirt durch 2, und die gebogene Oberflächen ebenfalls aus der Multiplikation des Umkreises mit der Länge der Seite dividirt durch 2 besteht; so erhält man die Oberfläche des Kegels bequemer, wenn man den Halbmesser zu der Höhe der Seiten addirt, die Summe mit dem Umkreise multiplizirt, und das Produkt durch 2 dividirt.

381. **Aufgabe. Den Inhalt von den Oberflächen senkrechter gestümmelter Pyramiden und Kegel zu finden.**

Die Oberfläche einer gestümmelten Pyramide besteht aus lauter Paralleltrapetzen. Man berechne also den Inhalt derselben nach Nro 224 und addire die untere und obere Fläche dazu.

Die gebogene Oberfläche eines gestümmelten Kegels kann aus lauter unendlich kleinen Trapetzen zusammengesetzt, betrachtet werden, wovon nach Nro. 224. die mittlere Kreislinie, multiplizirt mit der Höhe der Seite des Kegels, den Flächeninhalt gibt, zu welchem die obere und untere Kreisfläche addirt wird.

382. **Aufgabe. Die Oberfläche einer Kugel, eines Kugelausschnittes, und eines Kugelbandes zu finden.**

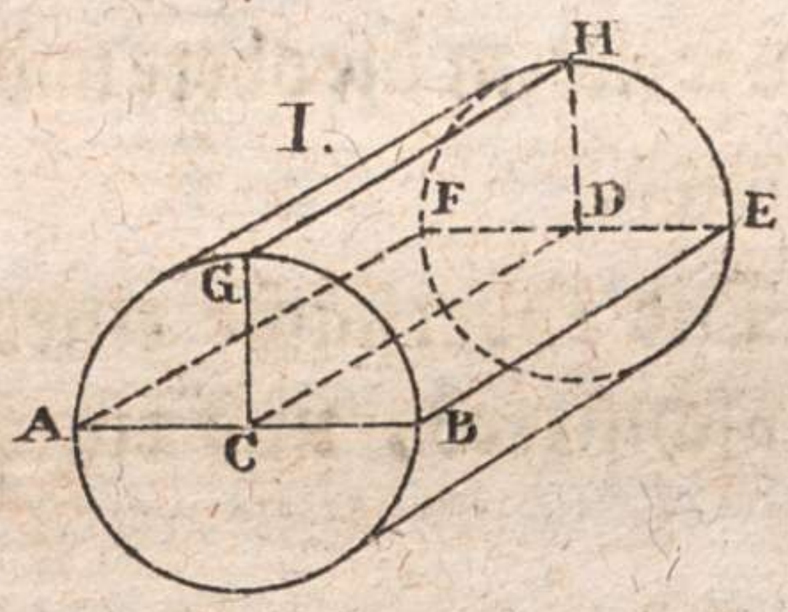
Die Oberfläche der Kugel wird erhalten, wenn man nach Seite 198. Nro. 329. den Durchmesser zum Quadrat erhebt, mit der Zahl 314 multiplizirt, und durch 100 dividirt.

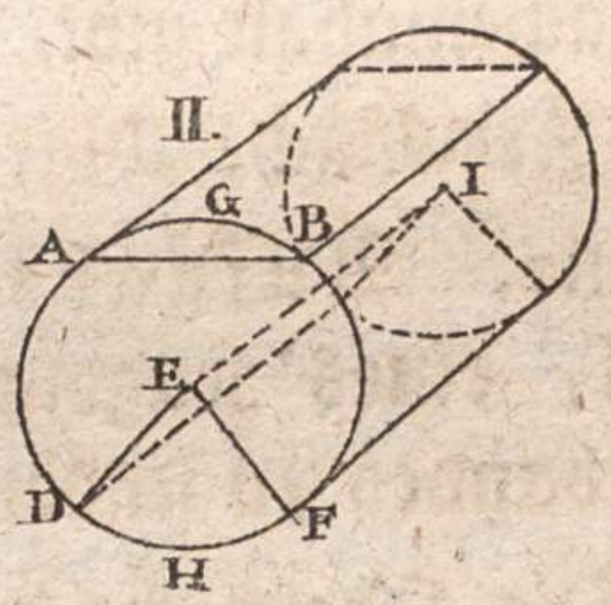
Die Oberfläche eines Kugelausschnittes wird gefunden, wenn man nach Nro. 330. die gebogene Oberfläche des Kugelstückes, und nach Nro. 389. die gebogene Oberfläche des damit verbundenen Kegels sucht, und beyde zusammen addirt.

Die Oberfläche eines Kugelabschnittes erhält man, wenn die gebogene Oberfläche eines Kugelstückes nach Nro. 330. und die damit verbundene Kreisfläche nach Nro. 228. ausgerechnet, und beyde zusammen addirt werden.

Die Oberfläche eines Kugelbandes erhält man nach Nro. 330.

Von dem Walzenschnitte und seiner Anwendung auf die Ausrechnung der Gewölbe.

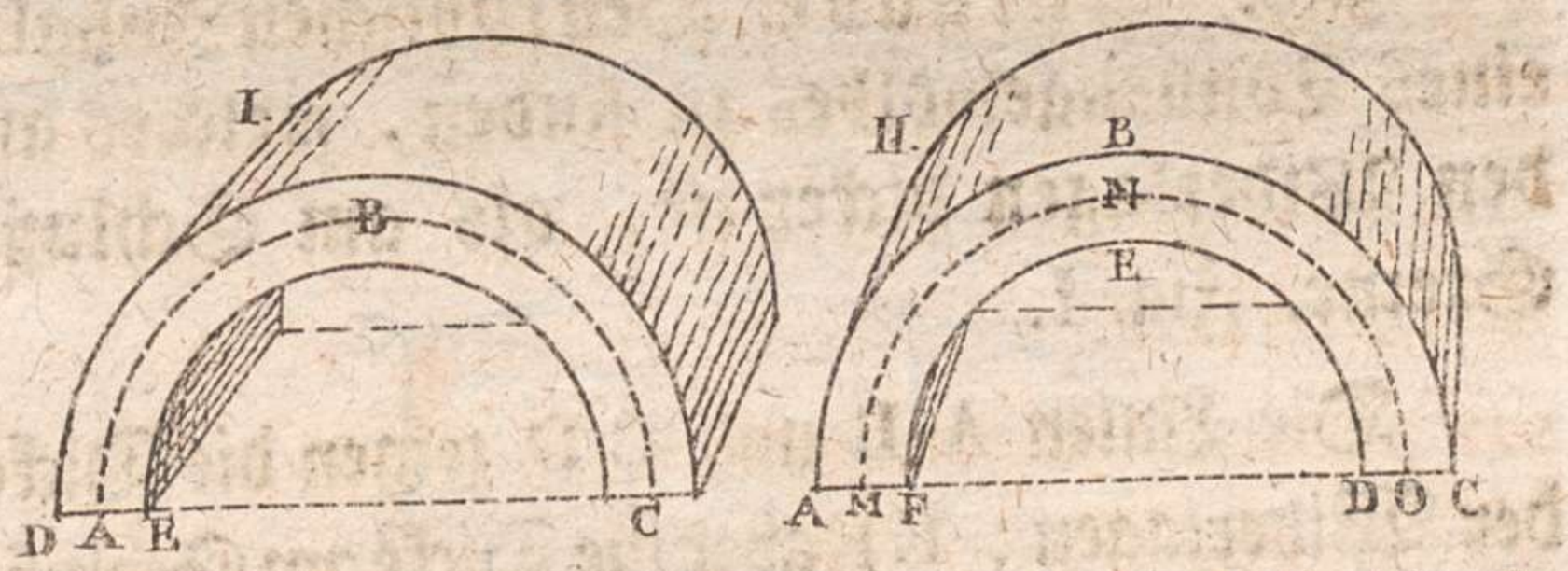




383. **Erklärung.** Fig. I. Wenn eine senkrechte Walze nach dem Durchmesser A B durch seine Achse C D von einer Fläche A B E F durchschnitten wird; so gibt der Schnitt zwey **halbe Walzen.** Schneidet man eine solche halbe Walze nach der senkrechten Richtung des Halbmessers G C, nach C D und G H; so hat man eine Viertelwalze. Durchschneidet man Fig. II. eine Walze nach der Sehne A B gleichlaufend mit der Achse E I, so erhält man einen Walzenabschnitt; und wird dieselbe nach zwey Halbmes-

sern D E und E F nach der Achse E I geschnitten, so hat man einen Walzenausschnitt.

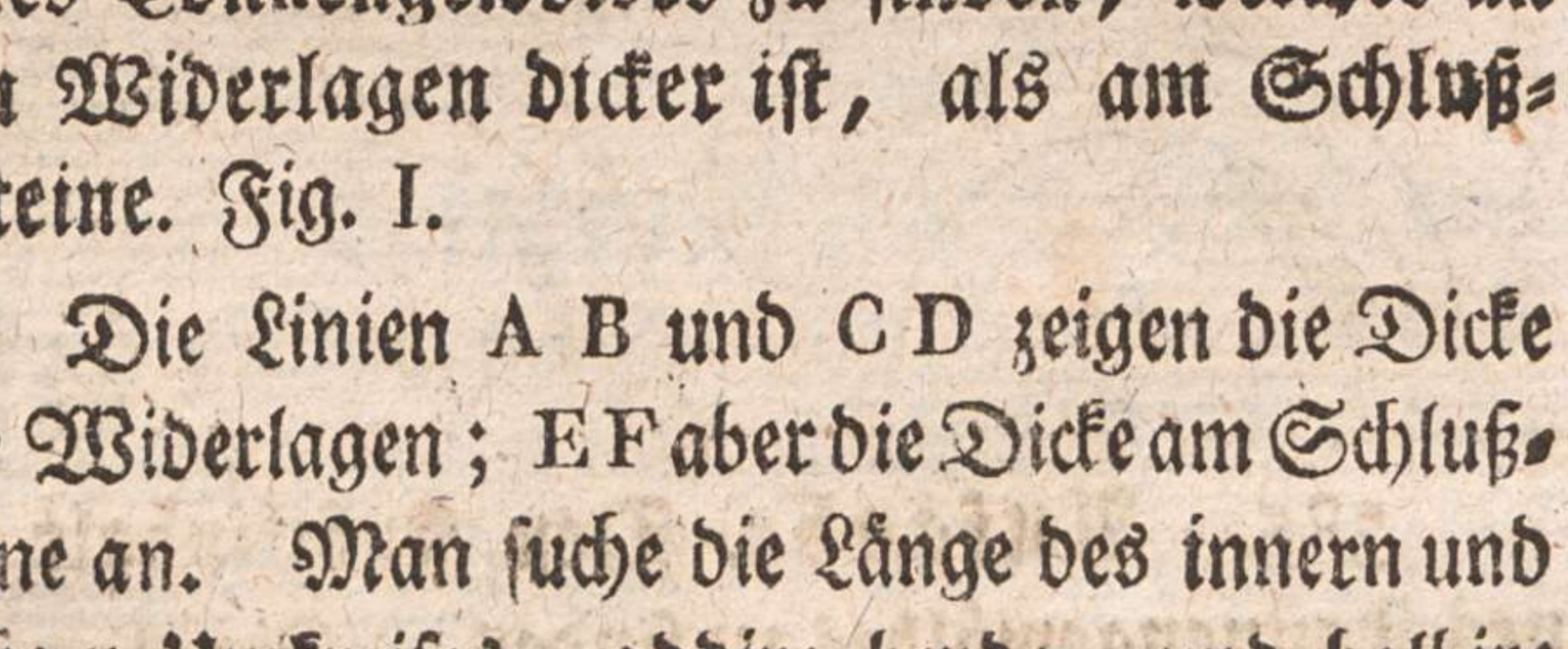
384. Weil man die gebogene Oberfläche einer Walze erhält, wenn man den Umkreis mit der Länge der Walze multiplizirt; so wird die Oberfläche einer halben Walze erhalten, wenn das obige Produkt durch 2, und die einer Viertelwalze, wenn dasselbe durch 4 dividirt wird. Nimmt man bey der Ausrechnung des halben Umkreises anstatt der Zahl 314 seine Hälfte 157; so kann die Division mit 2 erspart werden. Die gebogene Oberfläche eines Walzenabschnittes oder Walzenausschnittes wird erhalten, wenn man bey dem ersten seinen Bogen A G B, und bey dem zweyten den Bogen D H F mit seiner Länge multiplizirt.



385. **Aufgabe. Den Kubikinhalt eines Tonnengewölbes zu finden.** Fig. I.

Man theile die Dicke des Gewölbes in zwey gleiche Theile; nehme A C zum Durchmesser; suche die gebogene Oberfläche des Gewölbes A B C, und multipliziere sie mit der Dicke desselben D E. Die Ursache dieses Verfahrens ist für sich klar.

Fig. II. Will man lieber die Fläche des Durchschnittes eines Tonnengewölbes A B C D E F ausrechnen, und mit der Länge des Gewölbes multipliziren; so erhält man ebenfalls den kubischen Inhalt desselben. Die Fläche des Durchschnittes aber erhält man, wenn man die mittlere halbe Kreislinie M N O mit der Dicke A F multiplizirt; weil sich die ganze Fläche, als aus unendlich vielen kleinen Trapetzen zusammen gesetzt, betrachten läßt.



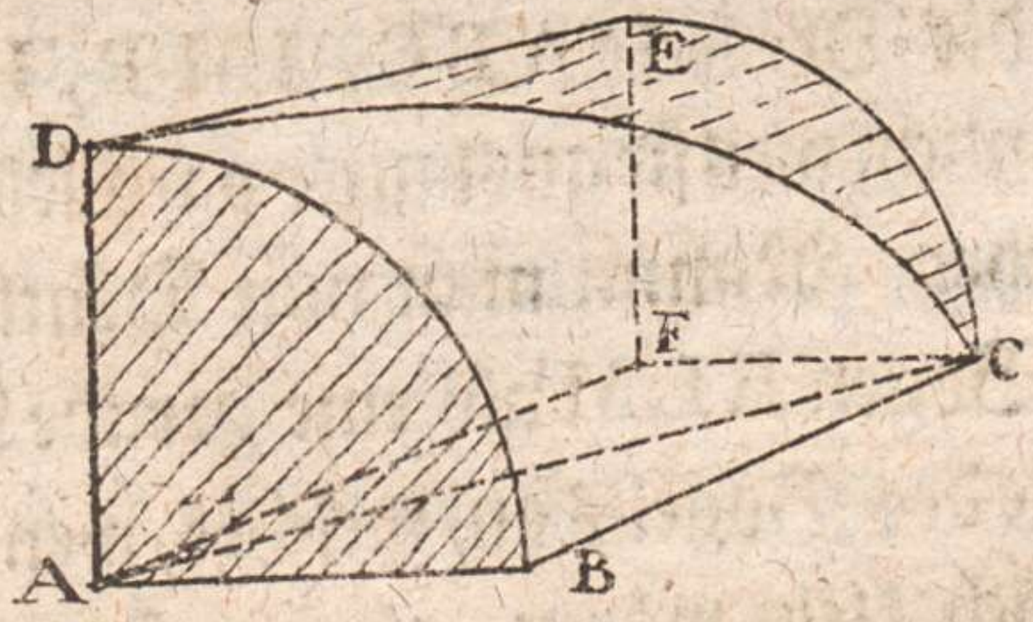
386. **Aufgabe.** Den kubischen Inhalt eines Tonnengewölbes zu finden, welches an den Widerlagen dicker ist, als am Schluß-Steine. Fig. I.

Die Linien A B und C D zeigen die Dicke der Widerlagen; E F aber die Dicke am Schlußsteine an. Man suche die Länge des innern und äußern Umkreises, addire beyde, und halbire die Summe: so hat man den mittlern halben Umkreis, welchen man, um die gebogene Oberfläche des Gewölbes zu erhalten, mit der Länge desselben multiplizirt. Wird ferners A B zu E F addirt und die Hälfte dieser Summe mit der gebogenen Oberfläche multiplizirt; so geht da-

durch der kubische Inhalt des Gewölbes hervor. Es ist aber zu bemerken, daß der äußere Bogen A E D kein halber Kreisbogen, sondern kleiner als ein solcher ist; weil der Mittelpunkt desselben O unter dem Mittelpunkte M des kleinern Kreises liegt.

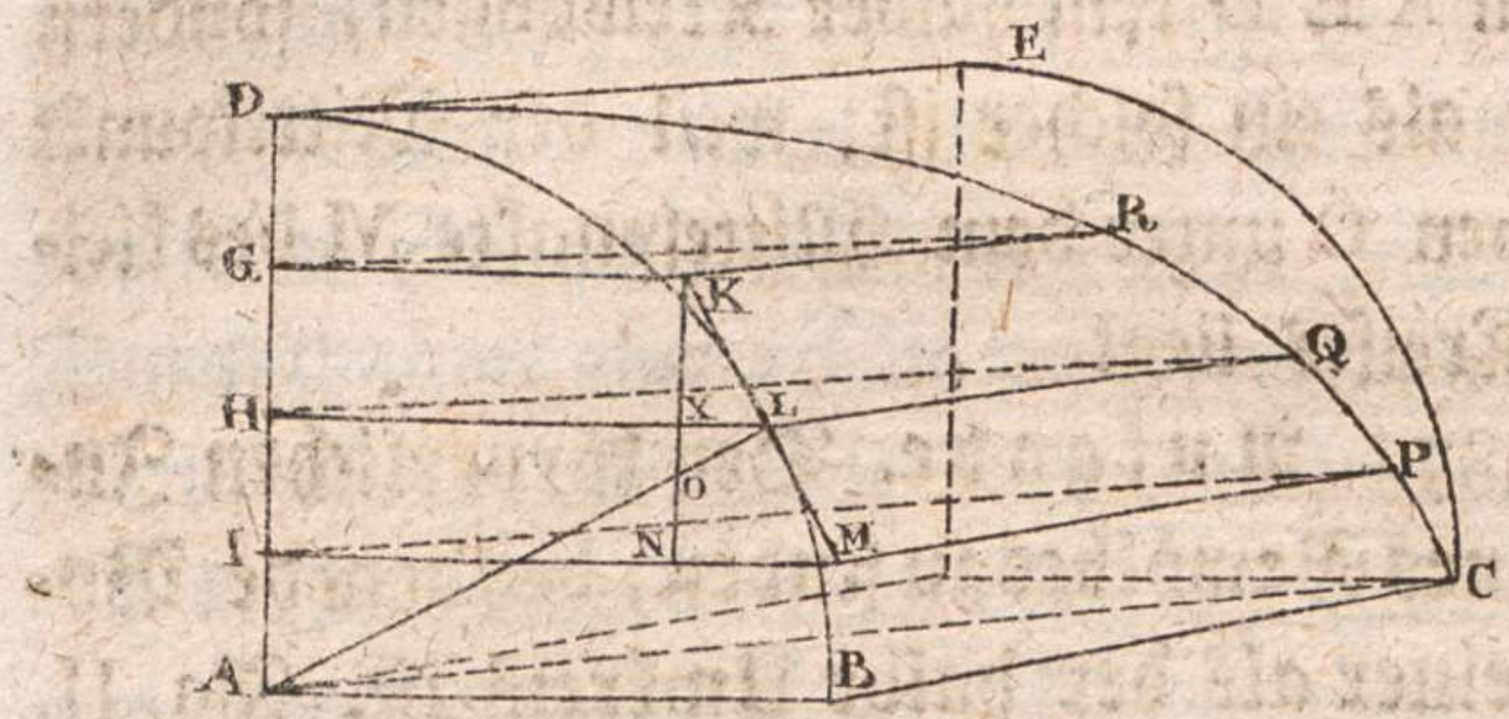
387. **Aufgabe.** Den körperlichen Inhalt eines Gewölbes zu finden, bey dem der Bogen kleiner als der halbe Umkreis ist. Fig. II.

Man suche den ganzen Umkreis nach dem bekannten Halbmesser; multiplizire ihn mit der Anzahl der Grade des Bogens, welche man durch den Tranzporteur erhält, und dividire ihn durch 360: so kömmt die Länge des Bogens A B C zum Vorscheine. Wird diese mit der Länge des Gewölbes, und mit der Dicke desselben multiplizirt; so erhält man den kubischen Inhalt des Gewölbes.



388. **Erklärung.** Schneidet man eine senkrechte Viertelwalze nach der Diagonallinie seiner Grundfläche A C in der senkrechten Richtung des Halbmessers A D; so nennt man den Theil A D C B einen Viertel-Walzenabschnitt, und das übrig gebliebene Stück C D E F das Komp-

lement, (Ergänzungsstück) eines Viertel-Walzenabschnittes.



389. Lehrsatz. Die gebogene Oberfläche eines Viertel-Walzenabschnittes ist gleich A D oder A B multiplizirt mit B C, und also noch so groß, als seine Grundfläche.

Beweis. Man denke sich den ganzen Abschnitt parallel mit der Grundfläche in lauter gleiche sehr kleine Theile zerschnitten; so sind M L Q P und L K R Q Oberflächen dieser Theile, und die Dreyecke A B C, I M P, H L Q, einander ähnlich; weil sie aus lauter parallelen Schnitten entstehen. Nimmt man nun Deutlichkeit halber den Bogen K L M als eine gerade Linie, oder Tangente des Bogens an, welches, wenn die Theile unendlich klein wären, ohne zu fehlen geschehen könnte; so gibt die Oberfläche K R P M ein Trapez, und K M multiplizirt mit der mittlern Länge L Q den Flächeninhalt desselben. Es ist aber K M multiplizirt mit L Q gleich G I multiplizirt mit B C, welches auf folgende Art gezeigt werden kann.

Man ziehe K N senkrecht auf I M, und aus A den Halbmesser A L, so sind die Dreyecke K N M, und L H A einander ähnlich; denn der Halbmesser A L macht mit der Tangente K M bey L einen rechten Winkel; das kleine Dreyeck K L O ist also bey L rechtwinklicht, und wird nach Seite 151. Nro. 259. durch die aus der Spitze des rechten Winkels herabgelassene Senkrechte L X in zwey ähnliche rechtwinklichte Dreyecke K X L und L X O getheilt. Es ist aber L X parallel mit N M; folglich das Dreyeck K X L ähnlich dem Dreyecke K N M. Ferners ist X O parallel mit H A, also auch L X O ähnlich L H A. Es sind daher auch die Dreyecke L H A und K N M einander ähnlich; folglich verhält sich:

$$L A : L H = K M : K N.$$

Setzt man anstatt L A die gleiche A B, und anstatt K N die gleiche G I, so ist

$$A B : L H = K M : G I.$$

In den ähnlichen Dreyecken A B C, und H L Q ist ebenfalls

$$A B : L H = B C : L Q.$$

Es ist also auch

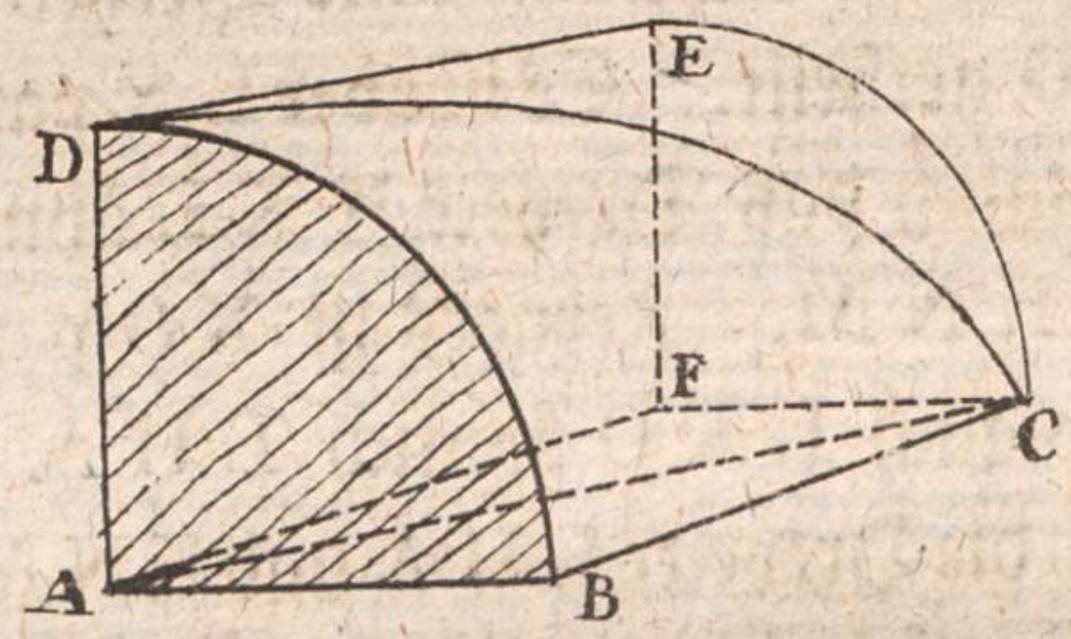
$$K M : G I = B C : L Q,$$

und die Produkte der äußern und innern zwey Glieder

$$K M \times L Q = G I \times B C,$$

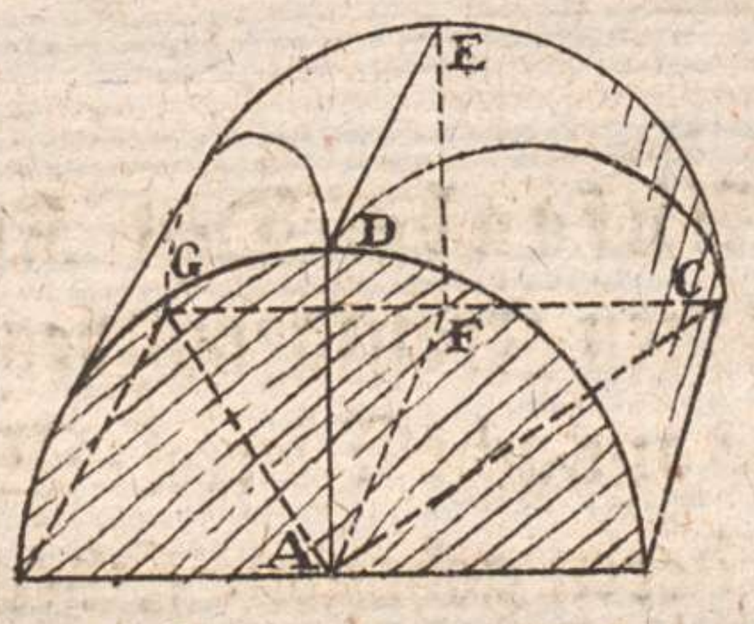
welches zu erweisen war.

Da nun dieses von allen abgeschnittenen Stücken kann gesagt werden, und ihre gesammten Höhen den Halbmesser ausmachen; so ist der Halbmesser D A, oder A B multiplizirt mit B C gleich der Oberfläche aller Trapetzen, oder der gebogenen Oberfläche des Viertel-Walzenabschnittes D C B, und daher noch so groß als seine Grundfläche A C B.



390. **Zusatz. Die gebogene Oberfläche des Komplements eines Viertel-Walzenabschnittes** D E C erhält man, wenn man die gebogene Oberfläche des Abschnittes B C D von der gebogenen Oberfläche der Viertelwalze B C D E abzieht, und ist folglich der Unterschied (Differenz) zwischen der gebogenen Oberfläche eines Viertel-Walzenabschnittes, und der einer Viertelwalze. Da nun die Viertel-Walze durch die Multiplikation des Bogens E C mit der Länge E D erhalten wird; so gibt E D multiplizirt mit E C, wovon E D oder C B multiplizirt mit E F oder A B abgezogen werden soll, die Oberfläche C D E; oder E D × E C — E D × E F = C D E. Da aber in dieser Berechnung zwey Mahl mit E D

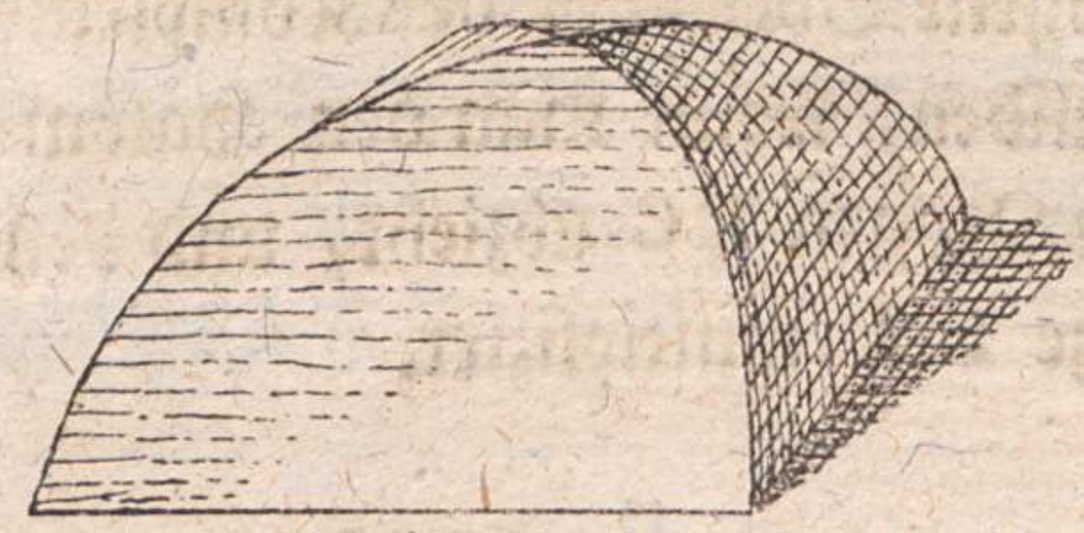
multiplizirt, und ein Mahl diese Multiplikation wieder abgezogen wird; so braucht man das Ganze nur ein Mahl mit E D zu multipliziren, wodurch E C — E F × E D = C D E entsteht. Die gebogene Oberfläche des Komplements wird also gefunden, wenn man den Halbmesser E F von dem Bogen E C abzieht, und den Rest mit der Länge E D multiplizirt.



391. **Erklärung.** Schneidet man von einer senkrechten halben Walze nach der Richtung ihrer Grundfläche A C und A G, zwey Viertel-Walzenabschnitte hinweg; so bleibt ein Körper D C F G E übrig, den man das **Supplement** (**Ergänzungsstück**) **eines Halb-Walzenabschnittes** nennet.

392. **Zusatz.** Theilt man dieses Supplement durch die Fläche A D E F in zwey gleiche Theile; so erhält man zwey Komplemente von Viertels-Walzenabschnitten. Da nun die gebogene Oberfläche eines solchen Komplements gefunden wird, wenn man den Halbmesser E F von dem Bogen E C abzieht, und mit der Länge E D multiplizirt; so erhält man die gebogene Oberfläche des

Supplements eines Halb = Walzenabschnittes, wenn man den Durchmesser G C von dem halben Umkreise G E C abzieht, und mit der Länge E D multiplizirt.

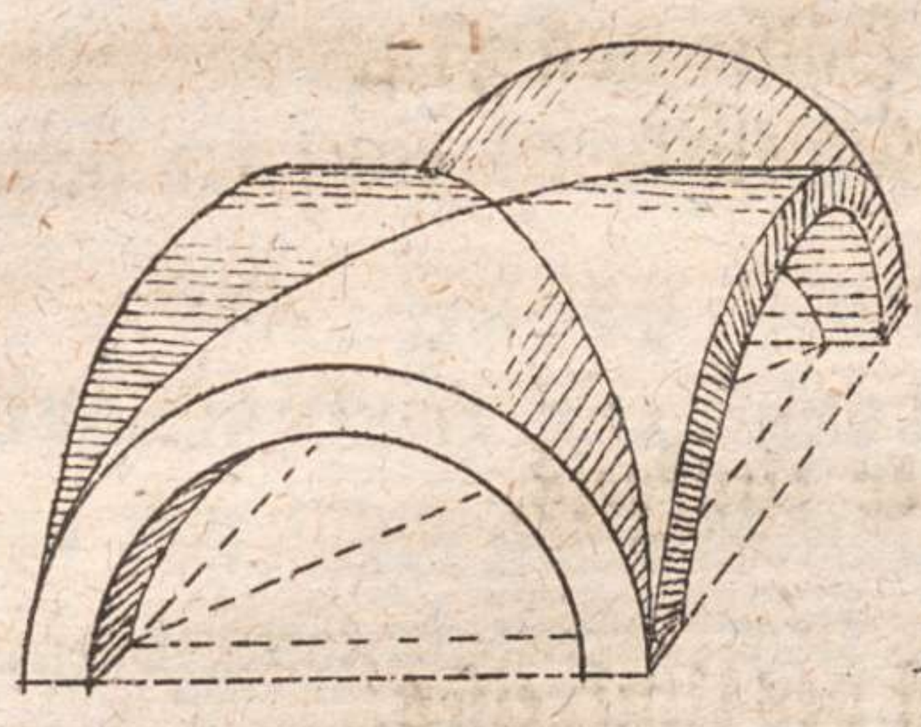


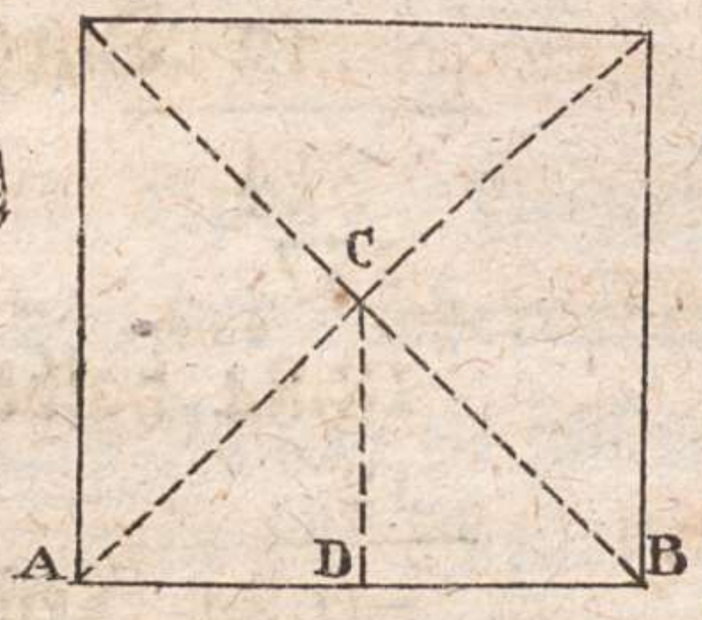
393. **Aufgabe. Den Kubikinhalt eines geschlossenen Kreuzgewölbes zu finden.**

Da dieses aus acht Viertel-Walzenabschnitten bestehet, deren gebogene Oberflächen noch so groß sind, als ihre Grundflächen; so suche man den Inhalt der Grundfläche, multiplizire ihn mit 2, und mit der Dicke des Gewölbes: so hat man den Kubikinhalt eines geschlossenen Kloster- oder Kreuzgewölbes.

394. **Anmerkung.** Weil der Durchmesser von dem Mittel der Dicke des Gewölbes zur Ausrechnung der gebogenen Oberfläche genommen werden muß, wie wir bereits bey dem Tonnengewölbe gesehen haben; so versteht es sich, daß sich die Grundfläche bey der Berechnung nach dem nähmlichen Durchmesser richten müsse, welches auch bey den folgenden Gewölben der Fall ist.

395. **Aufgabe. Den Kubikinhalt eines offenen Kreuzgewölbes zu finden.**





Da dieses, wenn die Grundfläche, wie gewöhnlich, ein Quadrat ist, aus vier Supplementen eines Halb-Walzenabschnittes besteht, so suche man die gebogene Oberfläche eines solchen Supplements, nach Nro. 392.; multiplizire sie mit der Dicke des Gewölbes, und das Produkt mit 4: so gibt dieses den kubischen Inhalt des Gewölbes.

Beyspiel. Der Durchmesser A B halte 12′, und daher C D, weil das ganze ein Quadrat ist, 6′; die Dicke des Gewölbes seye $1\frac{1}{2}$′ oder 15″ Dezimalmaaß: wie groß wird der kubische Inhalt seyn?

Man suche den halben Umkreis, ziehe den Durchmesser davon ab, und multiplizire den Rest mit der Länge C D; so hat man die gebogene Oberfläche eines Viertheils. Diese mit der Dicke des Gewölbes, und mit 4 multiplizirt, gibt den kubischen Inhalt des ganzen Gewölbes.

157 Die Hälfte von 314.
12 Durchmesser.

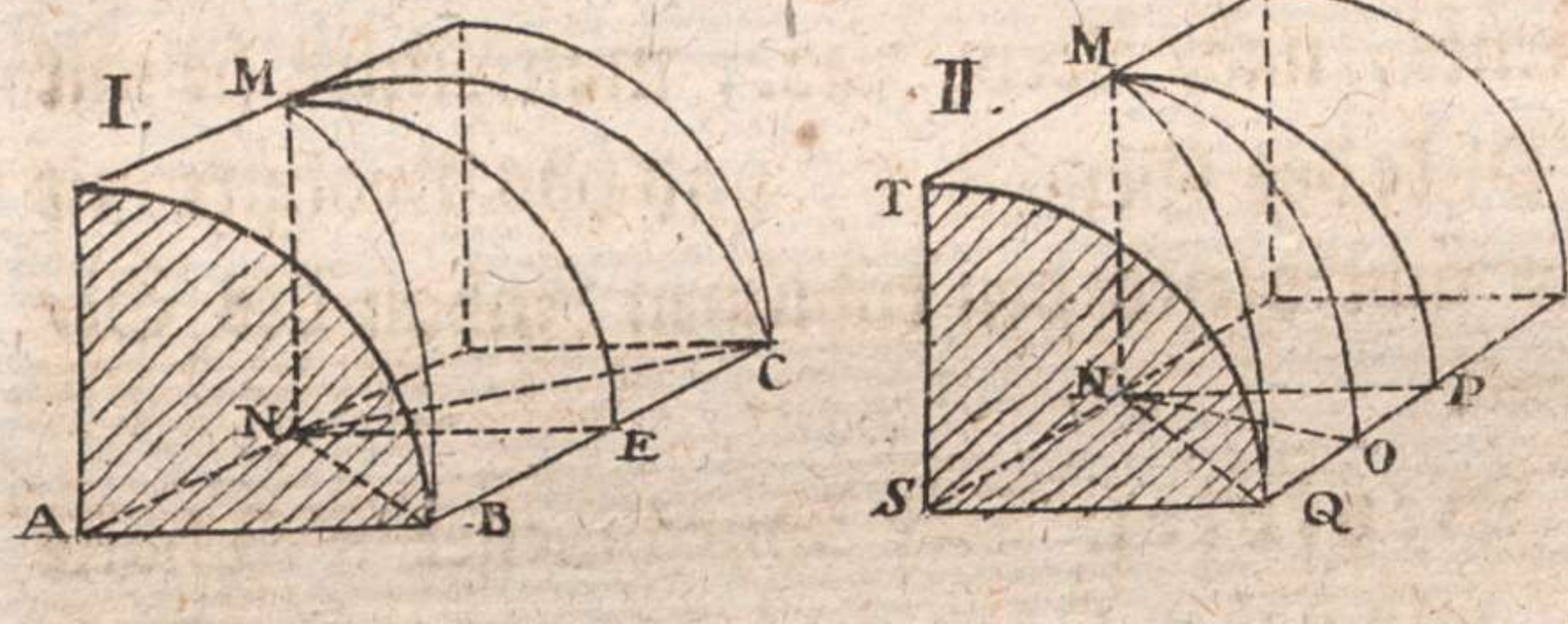
314
157

18,84 halber Umkreis.
12

–6,84 Rest des Umkreises.
6 Länge des Suppl. C D.

41',04–" gebogene Oberfläche.
60 anstatt der Multip. mit 15 und 4.

246c'240c" Kubikinhalt.



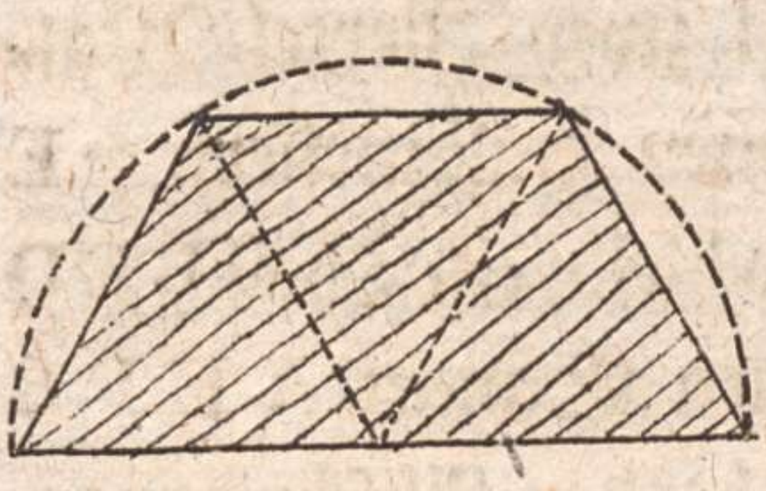
396. **Erklärung.** Wenn man eine senkrechte Viertelwalze Fig. I. nach der Linie C N und N B senkrecht mit dem Halbmesser M N schneidet, so nennt man das Stück B N M C **einen Viertel-Walzenausschnitt.**

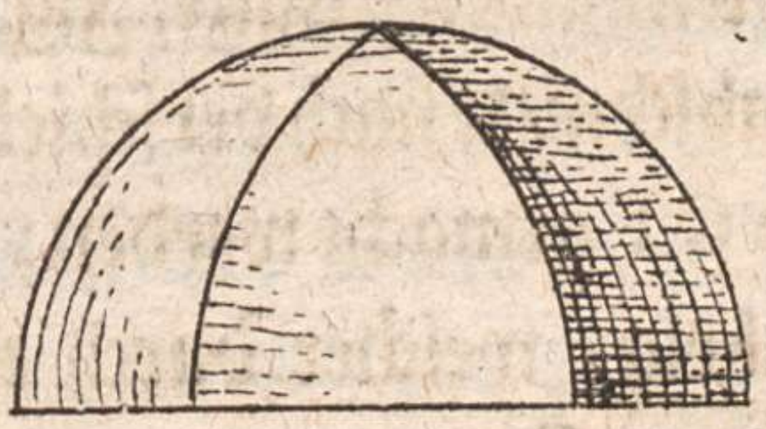
397. **Zusatz.** Weil ein Viertel-Walzen-Ausschnitt, durch einen senkrechten Schnitt M N E in zwey Viertel-Walzenabschnitte getheilt werden kann; so findet man seine gebogene Ober-Fläche eben so, wie die eines Viertel-Walzenabschnittes, wenn man den Halbmesser A B mit

seiner Länge B C multiplizirt; daher sie noch so groß als seine Grundfläche ist.

398. Zusatz. Fig. II. Auch die kleinern Ausschnitte M N O P sind von der vorhergehenden Art, ihre gebogenen Oberflächen zu finden, nicht ausgenommen, weil man sie als Theile derselben betrachten kann; daher ihre gebogenen Oberflächen ebenfalls noch so groß sind, als ihre Grundflächen: das ist = S Q × O P.

399. Zusatz. Die gebogenen Oberflächen der Komplemente von Viertel-Walzenausschnitten werden, wenn die Ausschnitte bis an die Punkte B und C gehen, nach Fig. I. Nro. 390. gefunden; gehen sie aber nicht so weit, wie M N O P, Fig. II. so bestehen sie aus einem Komplemente M Q S T, und aus einem Viertel-Walzenausschnitte M N O Q, und werden auch so berechnet.

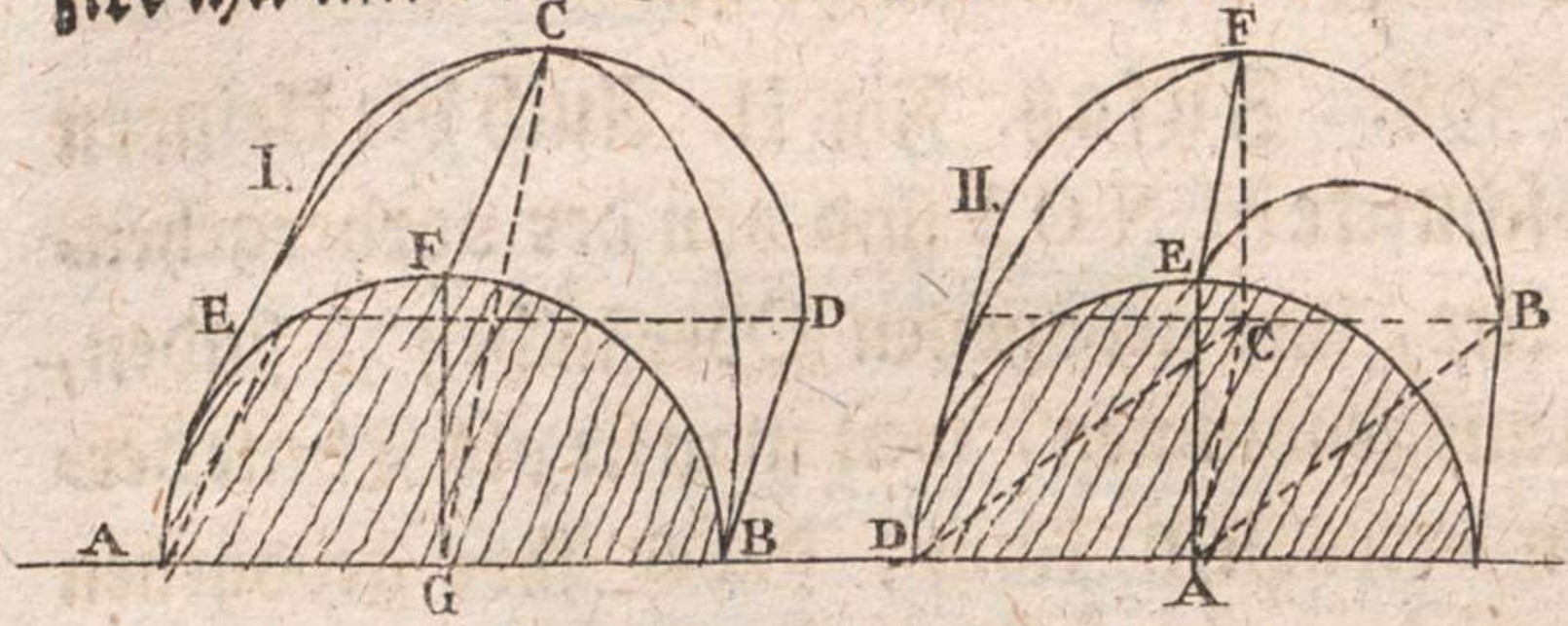




400. Aufgabe. Den kubischen Inhalt eines Sterngewölbes über ein regelmäßiges Vieleck zu finden.

Weil die Theile Viertel-Walzenausschnitte sind; so suche man den Flächeninhalt der Grund-

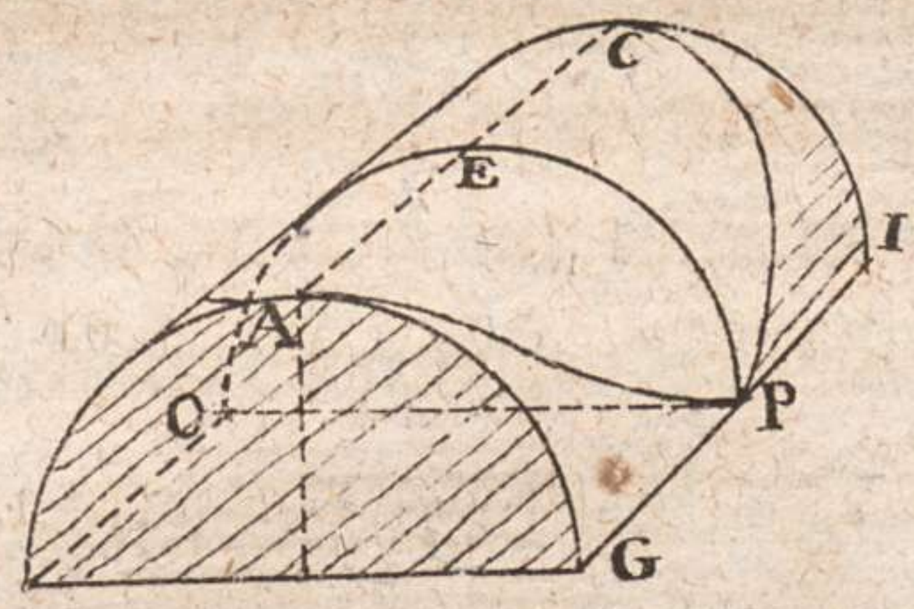
Fläche; nehme denselben doppelt, und multipli-
zire ihn mit der Dicke des Gewölbes.



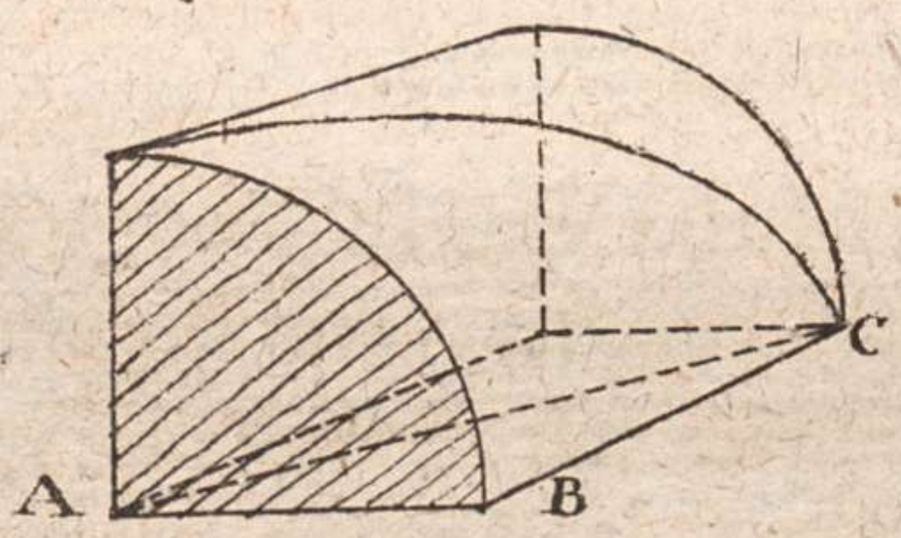
401. **Erklärung.** Wenn man Fig. I. eine halbe Walze aus dem Punkte C nach seinem Durchmesser A B schneidet; so nennt man das abgeschnittene Stück einen **Halb-Walzenabschnitt**, dessen gebogene Oberfläche eben so groß ist, als die Grundfläche A B E D; weil er durch einen Schnitt C F G in zwey Viertel-Walzenabschnitte zerlegt werden kann, deren gebogene Oberflächen zusammen so groß sind, als die Grundfläche A B E D. Wenn von einer senkrechten halben Walze, Fig. II. zwey Viertel-Walzenabschnitte nach verschiedenen Halbmessern A E und C F gemacht werden; so bleibt ein Theil B E D F übrig, welcher durch einen Schnitt A E F C in zwey Komplemente der beyden Abschnitte getheilt, und als solche berechnet werden kann.

402. **Erklärung.** Schneidet man eine senkrechte halbe Walze von A und C nach seinen Durchmesser O P; so erhält man einen **Halb-Walzenausschnitt** A P C O, dessen gebogene Oberfläche

aus



aus A C multiplizirt mit O P besteht; weil das Ganze durch einen Schnitt O E P in zwey Halb-Walzenabschnitte getheilt werden kann. Die Theile A G P und P C I geben Komplemente von Viertel-Walzenausschnitten, und werden auch als solche berechnet.



403. Lehrsatz. Der kubische Inhalt eines Viertel-Walzenabschnittes ist gleich dem Produkte, welches entsteht, wenn man das Quadrat des Durchmessers mit der Länge des Abschnittes multiplizirt, und das Produkt durch 3 dividirt.

Der Viertel-Walzenabschnitt kann als ein Körper betrachtet werden, welcher aus lauter unendlich-kleinen Pyramiden besteht, die ihre Grundflächen auf der gebogenen Oberfläche des

Abschnittes, und ihre Höhe in A als dem Mittel-Punkte des Viertelkreises haben. Weil nun die gebogene Oberfläche aus A B $\times$ B C besteht, und die pyramidalische Höhe ebenfalls A B ist; so gibt $\frac{A B^2 \times B C}{3}$ den Kubikinhalt eines Viertel-Walzenabschnittes.

404. Zusatz. Weil ein Viertel-Walzenausschnitt aus zwey Viertl-Walzenabschnitten besteht; so gibt $\frac{A B^2 \times B C}{3}$ (siehe die obige Figur I. Nro. 396.) den Kubikinhalt eines Viertel-Walzenabschnittes.

405. Zusatz. Der kubische Inhalt eines Halb-Walzenabschnittes, und der eines Halb-Walzenausschnittes wird erhalten, wenn man das Quadrat ihrer Halbmesser mit ihrer Länge multiplizirt, und das Produkt durch 3 dividirt; weil der erste aus zwey Viertel-Walzenabschnitten und der zweyte aus vier Viertel-Walzenabschnitten besteht. Es ist also nach den obigen Figuren der Inhalt des Halb-Walzenabschnittes gleich $\frac{A B^2 \times C F}{3}$, und der Inhalt des Halbwalzenausschnittes gleich $\frac{O P^2 \times A C.}{3}$ Fig. Nro. 401, und 402.

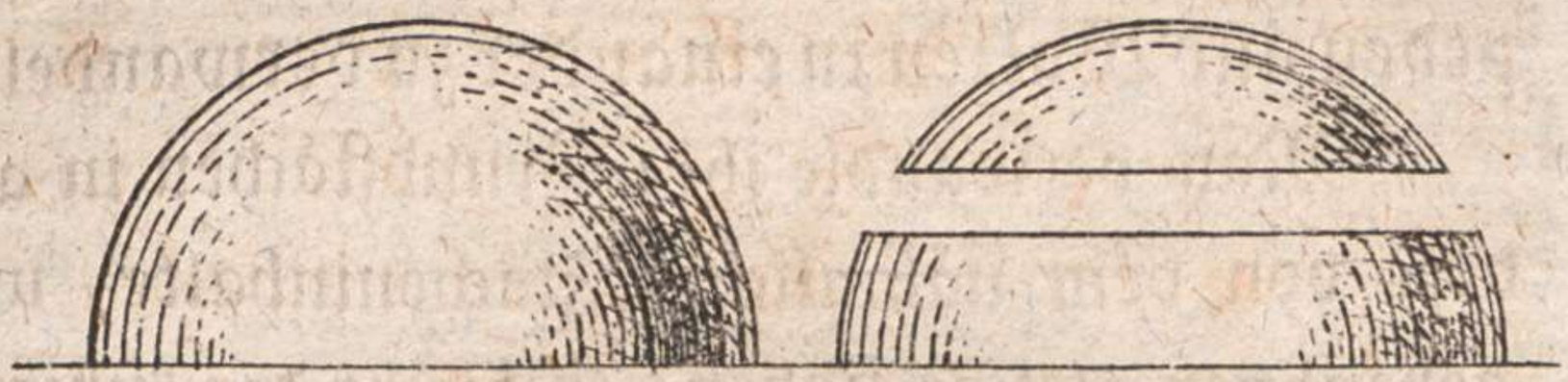
406. Zusatz. Der kubische Inhalt des Komplements eines Viertel-Walzenabschnittes, und

eines Viertel-Walzenausschnittes wird erhalten, wenn man den Inhalt des Abschnittes oder Ausschnittes von dem Inhalt der Viertelwalze abzieht. Das Komplement eines Halb-Walzenabschnittes, oder Halb-Walzenausschnittes findet man, wenn man den Abschnitt, oder Ausschnitt von der halben Walze abzieht.

407. Zusatz. Das Supplement eines Halb-Walzenabschnittes wird erhalten, wenn man die beyden Viertel-Walzenabschnitte von der halben Walze abzieht. Fig. Nro. 391.

408. Zusatz. Weil die Gewölbe hohle Körper sind, so kann man ihren kubischen Inhalt auch erhalten, wenn man ihre Theile nach dem größern und kleinern Durchmesser als ganze Körper berechnet, und den Inhalt des kleinern von dem Inhalte des größern abzieht, wodurch der kubische Inhalt des Gewölbes übrig bleibt.

409. Anmerkung. Um sich einen deutlichen Begriff von den Walzenschnitten zu machen, wird es gut seyn, wenn man eine Walze drehen läßt, und dieselbe nach den angezeigten Linien durchschneidet. Ihre Anwendung dient nicht nur zur Ausrechnung der verschiedenen Arten von Gewölbern, sondern auch um die Oberflächen von allerley Formen von Dächern zu finden, wenn sie aus vollen Kreisstücken bestehen, damit man das zur Bedeckung derselben nöthige Material daraus ermessen könne.



410. **Aufgabe.** Den kubischen Inhalt eines Kugelgewölbes, eines runden Schildgewölbes und eines offenen Kugelgewölbes zu finden.

Da man nach Seite 195. Nro 327. im Stande ist, die Oberfläche einer halben Kugel eines Kegelabschnittes, und eines Kugelbandes zu erhalten, so darf diese, um den kubischen Inhalt des Gewölbes zu bekommen, nur mit der Dicke desselben multiplizirt werden.

411. **Anmerkung.** Von dem kubischen Inhalte der eliptischen Gewölbe, und anderer, die weder aus einer Elipse, noch aus einem Kreisbogen bestehen, werden wir in dem Anhange handeln.

Von der Verwandlung der Körper.

412. **Erklärung.** Einen Körper in einen andern verwandeln, heißt, demselben eine andere Gestalt geben, ohne seinen kubischen Inhalt zu verändern.

413. Aufgabe. Prismen, Parallelepipeden und Walzen in einander zu verwandeln.

Man verwandle ihre Grundflächen in andere von dem nähmlichen Flächeninhalte, und gebe ihnen gleiche Höhen; so bleibt der kubische Inhalt. Denn, weil sich eine Kreisfläche, und ein Vieleck in ein Dreyeck, das Dreyeck in ein Parallellogram von einerley Inhalt verwandeln läßt; so können auch die daraus entstehenden Prismen in einander verwandelt werden, wenn man ihnen einerley Höhe gibt.

414. Aufgabe. Pyramiden und Kegel in Prismen und Walzen zu verwandeln.

Man mache auf ihre Grundflächen ein Prisma oder eine Walze, und gebe denselben den dritten Theil von der Höhe der Pyramide oder des Kegels zu ihrer Höhe.

415. Zusatz. Will man umgekehrt Prismen und Walzen in Pyramiden und Kegel verwandeln, so müssen diese bey einerley Grundfläche drey Mahl so hoch als jene gemacht werden.

416. Aufgabe. Eine Kugel in eine Walze zu verwandeln.

Man verfertigt aus dem Umkreise ihrer größten Kreisfläche eine Walze, und gibt ihr zwey Drittheile ihres Durchmessers zu ihrer Höhe.

417. Zusatz. Weil sich die Walze in ein Prisma, Parallelepipedum, Pyramide und

Kegel verwandeln läßt, so kann das Nähmliche auch mit der Kugel geschehen.

418. Aufgabe. Verschiedene Körper in andere von gegebener Grundfläche oder Höhe zu verwandeln.

Man rechne ihren kubischen Inhalt aus, und dividire ihn durch die gegebene Grundfläche oder Höhe; so wird nach Nro. 345 das Unbekannte zum Vorschein kommen. Betrachtet man z. B. den Kubikinhalt einer Kugel, als den eines Kegels, und nimmt eine gewisse Grundfläche dazu an; so erhält man, wenn diese in den Kubikinhalt dividirt, und mit 3 multiplizirt wird, die Höhe des Kegels.

Beyspiel. Es soll eine Kiste verfertiget werden, welche 20 Schäffel Getreide fassen kann; die Höhe soll 4′, und die Breite 3′ halten, wie groß wird die Länge seyn?

Man suche zuvor den Kubikinhalt von einem Schäffel, multiplizire ihn mit 20, und dividire das Produkt durch die Fläche, welche aus der Multiplikation der Höhe und Breite $4 \times 3 = 12$ entsteht.

Das baier. Schäffel hält bekanntlich $208\frac{1}{2}$ baierische Maß, und die Maß $74\frac{304}{1000}$ baierische zwölftheilige Kubikzolle, woraus der Kubikinhalt eines Schäffels, nähmlich $15492\frac{348}{1000}$ c″ oder 8c′ 1668c″ hervorgeht, für welche man

im gegenwärtigen Falle 9^c′ annehmen kann. Werden diese mit 20 multiplizirt, und durch die obige Fläche von 12^{-}′ dividirt; so entsteht die Länge der Kiste, welche 15′ beträgt.

Von der Ausziehung der Kubik-Wurzel.

419. **Erklärung.** Die Kubikwurzel aus einer Zahl ausziehen, heißt, jene Zahl finden, welche zwey Mahl durch sich selbst multiplizirt die gegebene Zahl hervor bringt. Die Kubikwurzel von 8 ist 2, weil $2 \times 2 \times 2 = 8$ ist. Eben so ist 3 die Kubikwurzel von 27; denn $3 \times 3 \times 3 = 27$. Die Kubusse der einfachen Zahlen bis 10 sind folgende:

1. 8. 27. 64. 125. 216. 343. 512. 729. 1000.
1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10.

Man sieht hieraus, daß eine Kubikzahl, welche nur aus 3 Ziffern besteht, nicht mehr als ein Ziffer zu ihrer Wurzel haben kann; weil 10 als die erste Zahl von zwey Ziffern schon 1000 zu ihrem Kubus hat. Eben so kann eine Zahl von 6 Ziffern nicht mehr als 2 Ziffer zu ihrer Kubikwurzel haben; weil der Kubus von 100 schon sieben Ziffer, nähmlich 1000000 in sich enthält. Eine jede Zahl kann also nur drey Mahl so viele Ziffer zu ihrem Kubus erhalten, als sie selbst hat.

420. Wenn man was immer für eine Zahl z. B. 5 in 2 Theile zertheilt, in 2 und 3, so enthält der Kubus dieser Zahl, erstens, den Kubus des ersten Theils; zweytens, den Kubus des zweyten Theils; drittens, das dreyfache Quadrat des ersten Theils durch den zweyten multiplizirt; viertens, das dreyfache Quadrat des zweyten Theiles durch den ersten multiplizirt. Der Kubus von 5, das ist 125, enthält also erstens 8, den Kubus des ersten Theils 2; zweytens 27, als den Kubus des zweyten Theils 3; drittens 36, als das dreyfache Quadrat des ersten Theils multiplizirt mit dem zweyten; viertens 54, als das dreyfache Quadrat des zweyten Theils multiplizirt mit dem ersten. Es ist also $8 + 27 + 36 + 54 = 125$. Hierin liegt der Grund des Verfahrens bey der Ausziehung der Kubikwurzel.

421. **Aufgabe.** Die Kubikwurzel aus der Zahl 77308776 auszuziehen.

77,308,776	426
64	
13 308	
48	
96	
48	
8	
10088	

```
-32 20776
   5 292
-------
  31 752
    4536
     216
-------
 322 0776
-------
       0
```

Man theile die ganze Zahl von der Rechten zur Linken in Klassen zu drey Ziffer, wo aber die erste Klasse manchmahl zwey, oder auch nur eines erhält; suche den Kubus von 77, oder den nächst kleinsten, welches 4 ist. Diese Zahl setze man hinter einen Vertikalstrich; den Kubus derselben 64 aber unter 77, und ziehe sie von einander ab. Zu dem Reste setze die nächste Klasse herunter; nehme das dreyfache Quadrat, das ist, multiplizire 4 durch sich selbst, und das Produkt 16 durch 3, welches 48 gibt; setze dieses als einen Divisor unter die Zahl 13308, und dividire sie: so erhält man den Quotienten 2; weil 3 zu groß seyn, und sich am Ende die Summe der Produkte von der obigen Zahl nicht würde abziehen lassen. Den neu gefundenen Quotienten 2 multiplizire man mit dem Divisor 48 und setze das Produkt so unter die Zahl 13304, daß die letzten zwey Ziffer 08 frey bleiben. Man nehme ferners das dreyfache Quadrat von 2, das ist $2 \times 2 \times 3 = 12$; multiplizire 12 mit dem gleich anfangs gefundenen Quotienten 4,

wodurch 48 entsteht; schreibe dieses so, daß die obere letzte Zahl 8 übrig bleibt; erhebe endlich 2 zum Kubus, welches 8 gibt; setze es so, daß es unter die letzte Zahl 8 zu stehen kömmt, und addire die drey Produkte zusammen; so erhält man 10088, welches von 13308 abgezogen wird. Zu dem Reste 3220 setze die dritte Klasse oder Abtheilung 776, und verfahre wie mit der zweyten. Man suche nähmlich das dreyfache Quadrat von der bisher gefundenen Wurzel 42, welches $42 \times 42 \times 3 = 5292$ gibt; setze es wieder als Divisor unter die Zahl 3220776, doch so, das die letztern zwey Zahlen wie oben frey bleiben, und dividire diese Zahl, wodurch man 6 zum Quotienten erhält. Multiplizire sodann den Divisor durch den neuen Quotienten 6, und setze die Zahl 31752 so darunter, daß die obern letzten zwey Ziffer 76 frey bleiben. Suche ferners das dreyfache Quadrat von 6, nähmlich $6 \times 6 \times 3 = 108$; multiplizire diese Zahl durch den zuvor gefundenen Quotienten 42, wodurch 4536 entsteht, und schreibe sie so darunter, daß die letzte Zahl frey bleibt. Erhebe endlich den neu gefundenen Divisor 6 zum Kubus, welcher 216 gibt; schreibe ihn unter die letzten drey Ziffer und addire die drey Produkte; so erhält man 3220776, welches von dem obigen abgezogen keinen Rest gibt, daher die gegebene Zahl eine vollkommene Kubikzahl ist.

Die Ursache dieses Verfahrens gründet sich auf das, was Nro. 420. ist gesagt worden. Es ist nähmlich in der ersten Klasse der Kubus des ersten Theils der Wurzel enthalten, die man folglich durch die Ausziehung dieser Wurzel erhält. In dem Reste, und dem ersten Ziffer der herabgesetzten Reihe befindet sich das dreyfache Quadrat des ersten Theils, multiplizirt durch den zweyten. Um also den zweyten Theil zu erhalten, muß der Rest sammt dem ersten Ziffer der zweyten Reihe durch das dreyfache Quadrat des ersten Theils der Wurzel dividirt; die zwey letzten Ziffer aber für die zwey andern Produkte, die noch in dieser Klasse enthalten sind, übrig gelassen werden. Wird endlich der Divisor, welcher aus dem dreyfachen Quadrate des ersten Theils besteht, durch den zweyten Theil multiplizirt, und das dreyfache Quadrat des zweyten Theils der Wurzel ebenfalls durch den ersten multiplizirt, dann der Kubus des zweyten Theils dazu gesetzt; so müssen alle diese Produkte nach ihrer Zusammen-Addirung von der zweyten Klasse und dem Reste abgezogen werden; weil sie alle gemäß dem, was Nro. 420. gesagt wurde, in der zweyten Klasse enthalten sind.

422. Da diese Art die Kubikwurzel auszuziehen ziemlich beschwerlich ist; so wollen wir hier eine etwas kürzere und bequemere anführen, und dazu die oben gegebenen Zahlen beybehalten:

```
77,308,776 | 426
64
-----------
13 308,
 4 8
 74 088
-----------
-3 22 0776
   52 92
   77308 776
-----------
0
```

Man theile die Ziffer in Klassen, und suche die Wurzel der ersten Klasse, die man auch hinter den Vertikalstrich schreibt, und seinen Kubus von der ersten Klasse abzieht, wie oben geschehen ist. Hat man nach geschehener Abziehung die zweyte Klasse herunter gesetzt, so nehme man das dreyfache Quadrat der erhaltenen Wurzel 4, nähmlich $4 \times 4 \times 3 = 48$ zum Divisor, und schreibe den Quotienten 2 zu 4; erhebe die bis dahin gefundene Wurzel zum Kubus, und ziehe sie von der gegebenen Zahl 77308 ab. Zu dem Reste setze die dritte Klasse; nehme zum Divisor abermahl das dreyfache Quadrat des Quotienten 42, und setze den erhaltenen Quotienten 6 zu 42; den ganzen bis dahin erhaltenen 426 aber erhebe wieder zum Kubus, und ziehe ihn von der obersten gegebenen Zahl 773087 76 ab, so bleibt kein Rest.

Aus diesem Verfahren sieht man, daß nur von der ersten Klasse die Kubikwurzel gesucht, und der nächst kleinste Kubus davon abgezogen

werden muß. In der Folge wird alle Mahl das dreyfache Quadrat zum Divisor gemacht, der erhaltene Quotient zum Kubus erhoben, und von der gegebenen obersten Zahl abgezogen.

423. Läßt sich die untere Zahl von der obern nicht abziehen; so ist dieß ein Zeichen, daß der Quotient zu groß angenommen wurde.

424. Bleibt nach vollendeter Rechnung ein Rest, so kann der Werth desselben durch Beysetzung von 3 Nullen in Dezimalen so genau gefunden werden, als man es für nöthig hält.

425. Soll die Kubikwurzel aus einem Bruche ausgezogen werden, so muß dieses aus dem Zähler und Nenner, jedem ins Besondere geschehen.

426. Wir wollen hier noch ein Paar Beyspiele zur Uebung beysetzen.

Ein würfelförmiges Gefäß soll $12^{c\prime},824^{c\prime\prime}$ in sich enthalten, wie groß wird eine Seite seyn?

$12,824^{c\prime\prime}$ | $2^{\prime},2^{\prime\prime},9^{\prime\prime\prime}$ Länge der Seite
8 |

4824
12
10648

Li 76000
1452
12008989

--815011

Beyspiel. Eine hohle kupferne Kugel soll 6 Litres Weingeist fassen: wie groß wird der Durchmesser seyn?

Weil nach Seite 301. Nro. 184. der Litre einen Kubikdekametre ausmacht, welcher 1000 Kubikzentimetres, und dieser 1000 Millimetres enthält; so geben 6 Litres 6,000,000 Millimetres, als den Kubikinhalt der Kugel. Da nun nach Seite 233. Nro. 199. der Kubikinhalt einer Kugel aus dem Kubus des Durchmessers, multiplizirt mit der Zahl 314, dividirt durch 600 besteht: so muß, um den Kubus des Durchmessers zu finden, nach Seite 209. Nro. 345. der obige Kubikinhalt mit 600 multiplizirt und durch 314 dividirt werden. Aus diesem Produkte wird die Kubikwurzel ausgezogen, welche den Durchmesser der Kugel gibt.

Multiplizirt man also 6000,000 mit 600, so erhält man 3600,000,000, welches mit 314 dividirt, die Zahl $11464968\frac{48}{314}$ als den Kubus des Durchmessers gibt, woraus mit Hinweglassung des Bruches die Kubikwurzel auf folgende Art ausgezogen wird:

11464,968 | 2'',2'',5''''.
8'

-3464
12
10648

--816968
1452
11390625

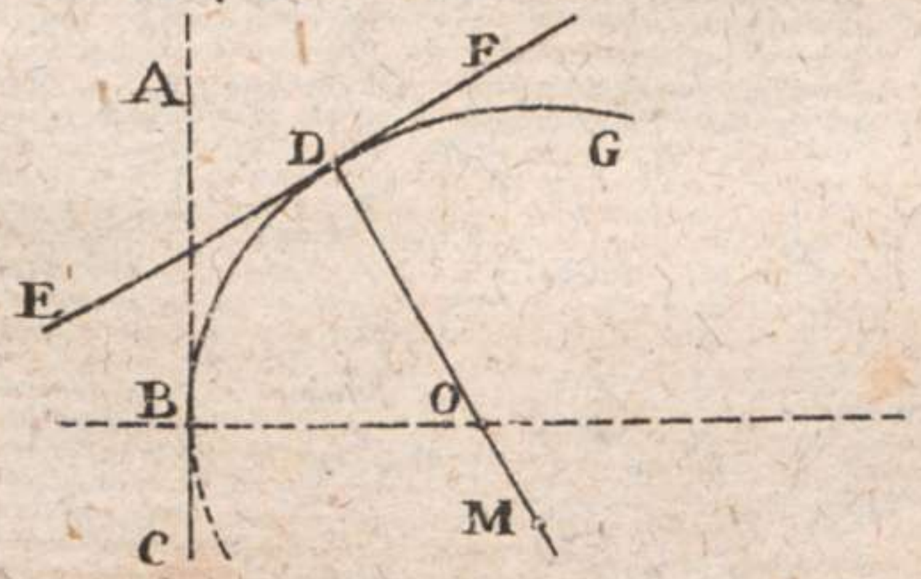
---74343

Das ist 2 Dezimetres, 2 Zentimetres, und 3 Millimetres, als Durchmesser der Kugel.

Anhang.

Von dem Aufzeichnen verschiedener gedruckter Bögen und anderer Linien, die in der Baukunst und den technischen Künsten vorkommen.

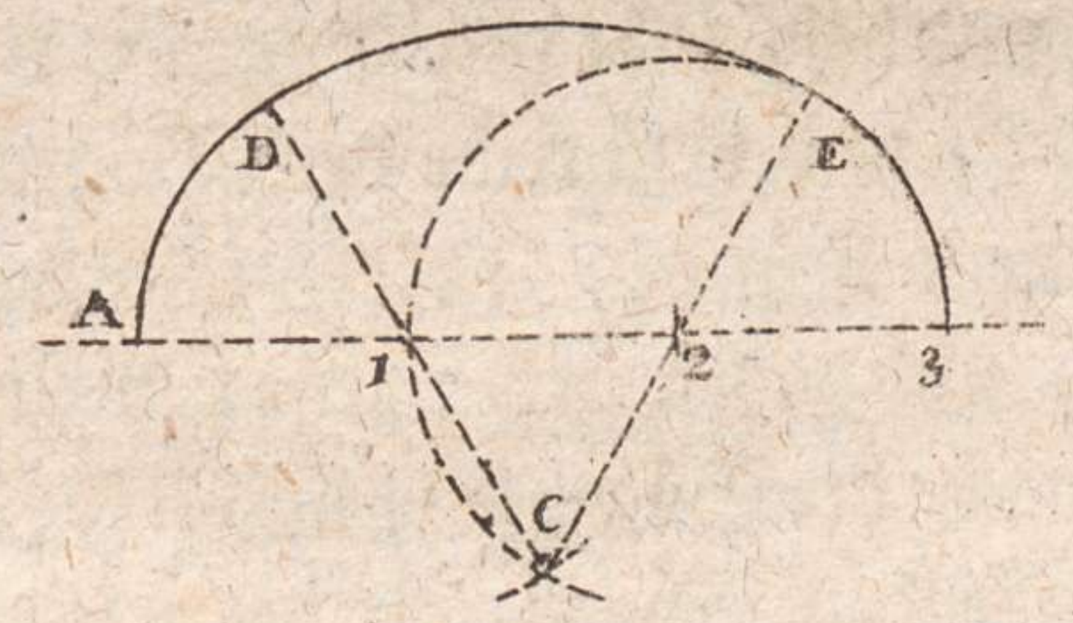
427. Erklärung. Ein Bogen, welcher mit einer halben Kreislinie beschrieben wird, heißt ein voller Bogen; derjenige, wo die halbe Weite größer ist, als die Höhe, wird ein gedruckter Bogen; wo aber die Höhe größer als die halbe Weite ist, ein überhobener Bogen genannt. Ein steigender Bogen ist der, dessen eine Seite höher liegt, als die andere; und ein gothischer Bogen derjenige, der aus zwey sich durchschneidenden Kreisstücken besteht. Diese verschiedenen Bögen werden in der Baukunst zu allerley Arten von Gewölbern angewandt.



428. Die Mauern, worauf die Gewölber ruhen, nennt man die Wiederlagen. Damit die Last

der

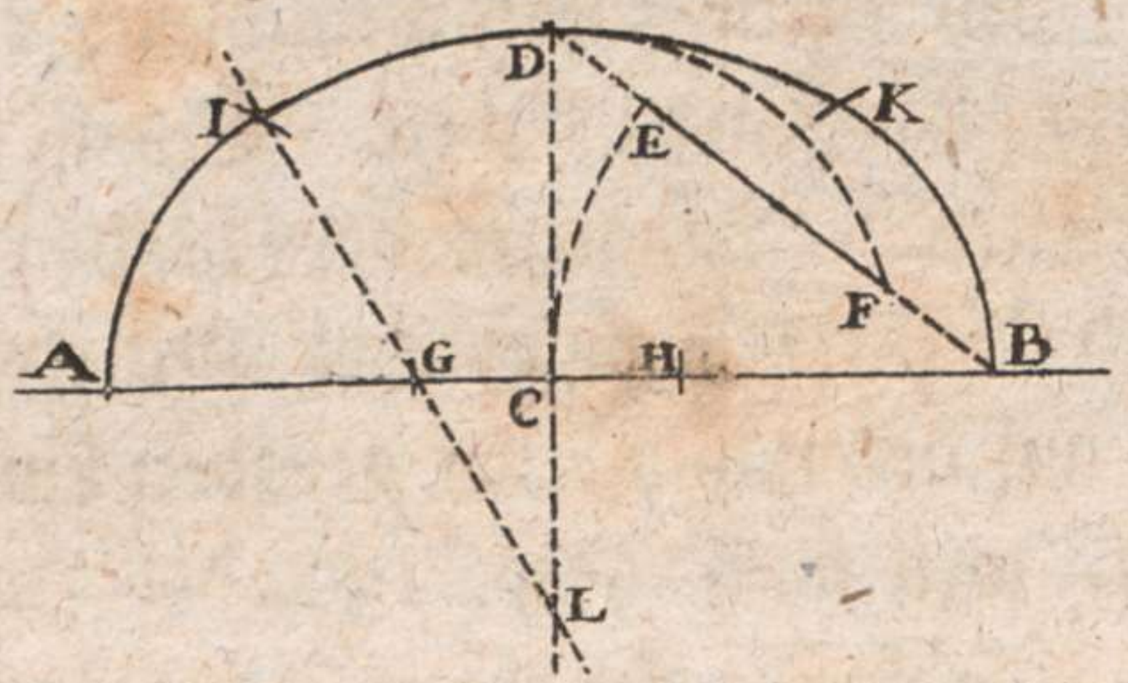
der Gewölber so viel möglich senkrecht auf die Wiederlagen wirket; so müssen diese Tangenten von den Bögen machen; wie A B C von dem Bogen B D. Eben so sollen auch die gedruckten Bögen, welche aus mehreren Kreisstücken bestehen, bey ihrem Zusammenstossungs-Punkte einerley Tangenten haben. So ist E F die gemeinschaftliche Tangente der beyden Bögen D B und D G; daher die ihre Mittelpunkte O und M auf der nähmlichen geraden Linie D M befinden, weil nach Nro. 130. die Halbmesser alle Mahl senkrecht auf ihren Tangenten stehen. Durch dieses Verfahren wird verhindert, daß die Bögen weder unter sich, noch mit den Wiederlagen einen Bruch machen, welches bey Gewölbern durchaus vermieden werden muß.



429. **Aufgabe. Einen gedruckten Bogen zu beschreiben, wenn die Weite desselben gegeben ist.**

Man theile die gegebene Weite in drey gleiche Theile, beschreibe aus 1 und 2 halbe Kreisbögen, und mit der nähmlichen Zirkelöffnung

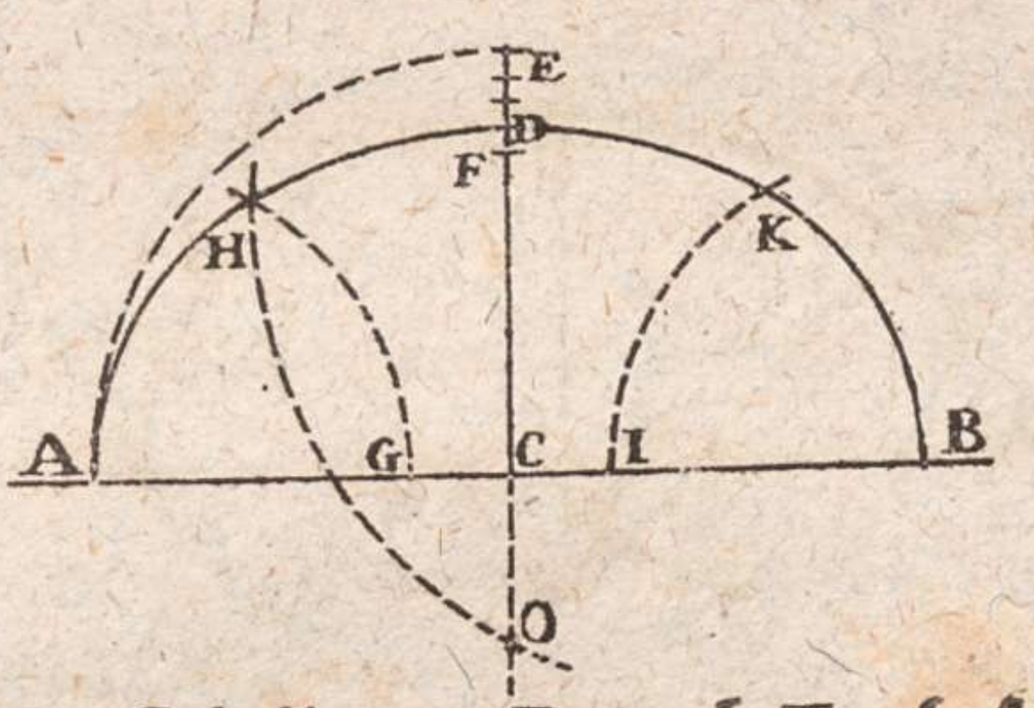
die Kreuzbögen bey C; ziehe dann durch C 1 und C 2 die geraden Linien C 1 D, und C 2 E; so gibt C den Mittelpunkt, aus welchem mit dem Halbmesser C D der Bogen D E gezogen, und mit D A und E 3 verbunden wird.



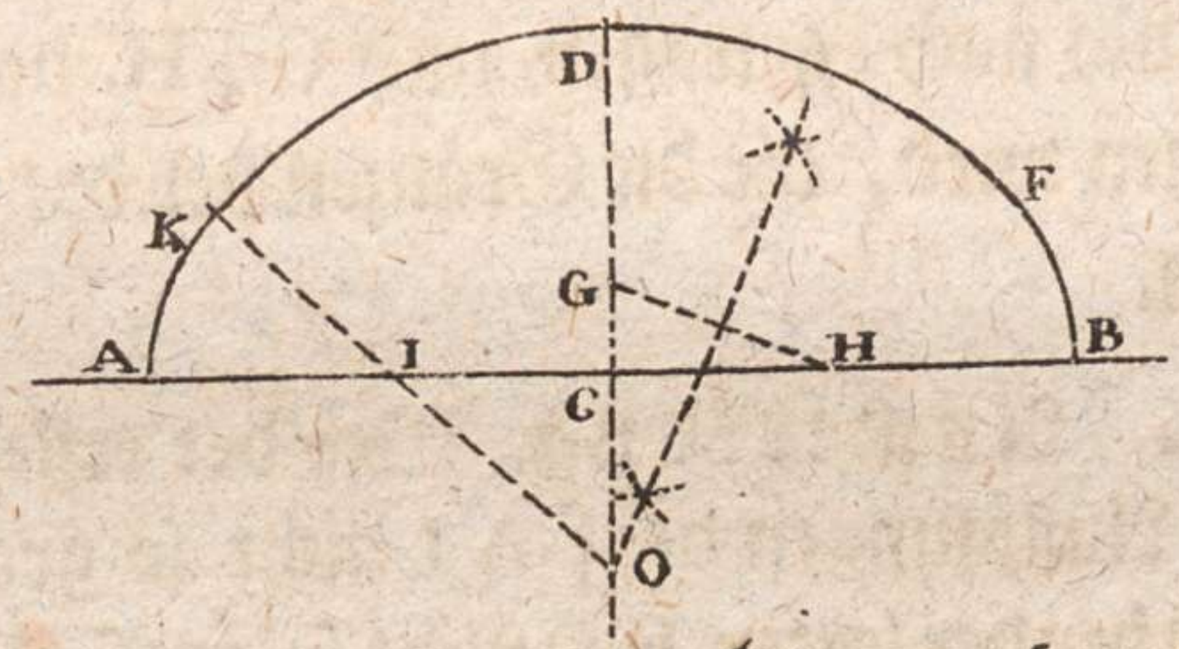
430. **Aufgabe.** Einen gedruckten Bogen zu beschreiben, wo außer der Weite auch die Höhe gegeben ist.

Es sey die Weite A B, und die Höhe C D gegeben; so ziehe man die Linie D B, setze den Zirkel in B, und beschreibe den Bogen C E; setze ihn dann in C, und beschreibe den Bogen D F; fasse die Linie E F in den Zirkel, und trage sie aus B in H, und aus A in G; setze den Zirkel in G und H; mache die Bögen A I, und B K; durchschneide die beyden Bögen mit der nähmlichen Zirkelöffnung aus A in I, und aus B in K, und ziehe die gerade Linie I G L: wo diese die verlängerte Mittellinie D C schneidet, da ist der Mittelpunkt für den obern Bogen I D K. Oder:

Wenn die Weite A B, und die Höhe C D gegeben ist; so mache man aus C den Bogen A E, theile D E in 3 gleiche Theile, und trage ei-

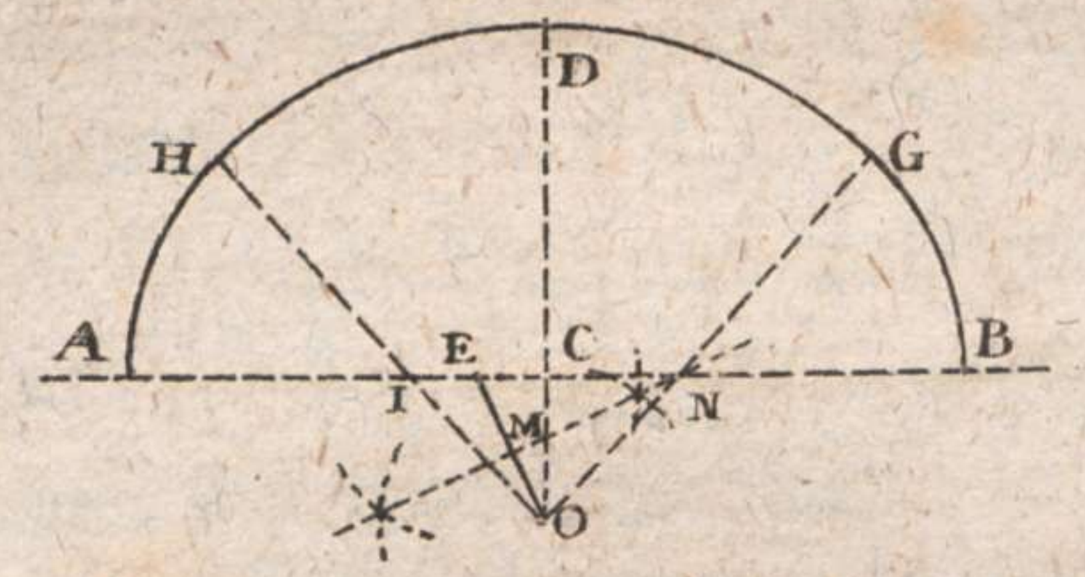


nen solchen Theil von D nach F; beschreibe mit F C aus A und B die Bogen G H, und I K; aus G und I aber die Bögen A H und B K; mache ferners mit H K aus K und H die Kreuzbögen bey O; so ist dieß der Mittelpunkt des Bogens H D K.



431. Aufgabe. Einen gedruckten Bogen zu beschreiben, wo nebst der Weite und Höhe noch die Mittelpunkte der beyden Seitenbögen gegeben sind.

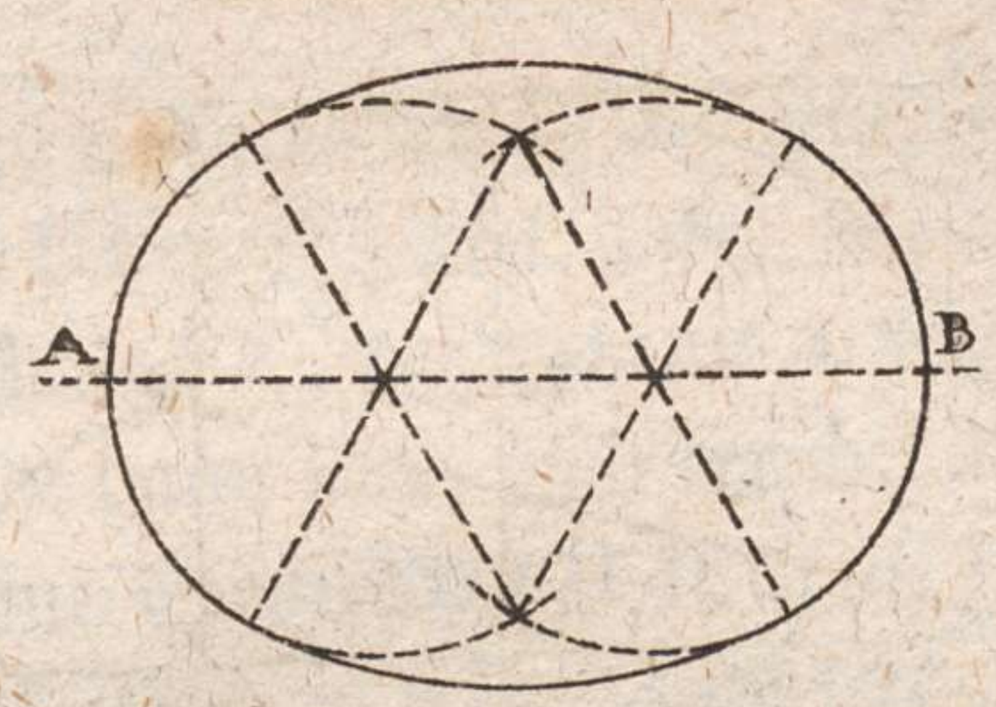
Es sey die Weite A B, die Höhe D C, und die Mittelpunkte I und H gegeben; so beschreibe man die Bögen A K und B F, trage A I von D nach G, und ziehe G H; setze den Zirkel in G und H; errichte auf G H eine Senkrechte, und verlängere sie bis O: so ist O der Mittelpunkt des Bogens K D F.



Ist der Mittelpunkt O des mittlern Kreisstückes, die Weite A B und die Höhe C D gegeben; so trägt man O D von B nach E, und zieht O E; auf der Mitte von O E bey M errichtet man ist eine Senkrechte M N; wo diese A B bey N schneidet, ist der Mittelpunkt des Seitenbogens B G, welcher auch nach I getragen, und O I H, dann G N O gezogen wird, die die Gränzen der drey Bögen geben.

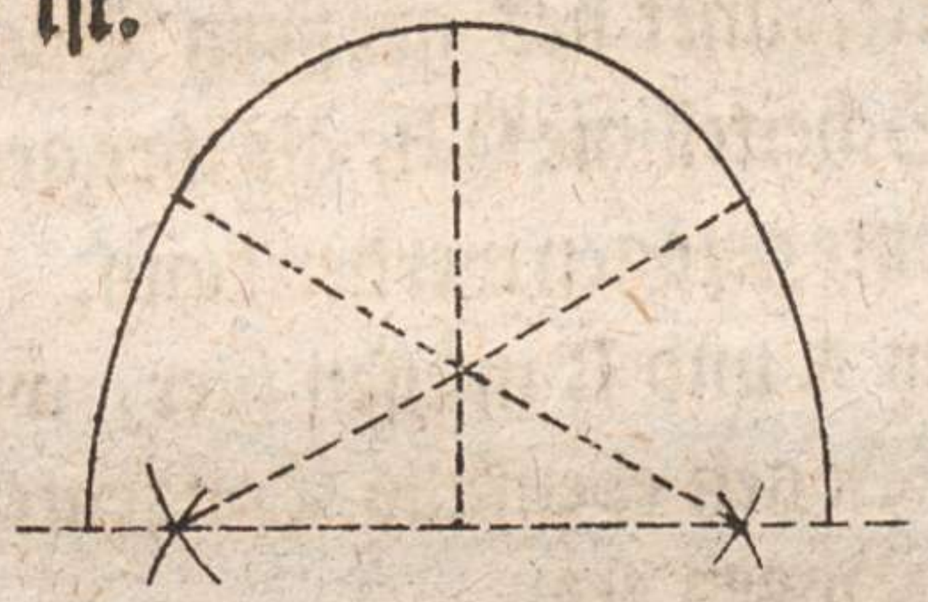
432. **Anmerkung.** Bey der ersten dieser zwey Auflösungen darf A I nicht so groß als C D, und bey der letzten E O nicht so groß als A E seyn. Ohne diesem Bedingnisse könnten diese Aufgaben nicht aufgelöset werden. Ueberhaupts sind die gedruckten Bögen nicht mehr angenehm, wenn die Höhe kleiner als der vierte Theil der Weite ist; weil die Bogenstücke zu sehr in ihren Krümmungen verschieden sind.

433. **Anmerkung.** Werden zwey gleiche gedruckte Bögen sowohl über als unter einer Linie A B gezogen, so entsteht eine ellipsartige Figur, die man eine gedruckte Kreislinie nennt, und die in den Kunstfächern zu verschiedenen Ein-



fassungen und Verzierungen gebraucht wird; indem sie angenehmer als die Ellipse ist.

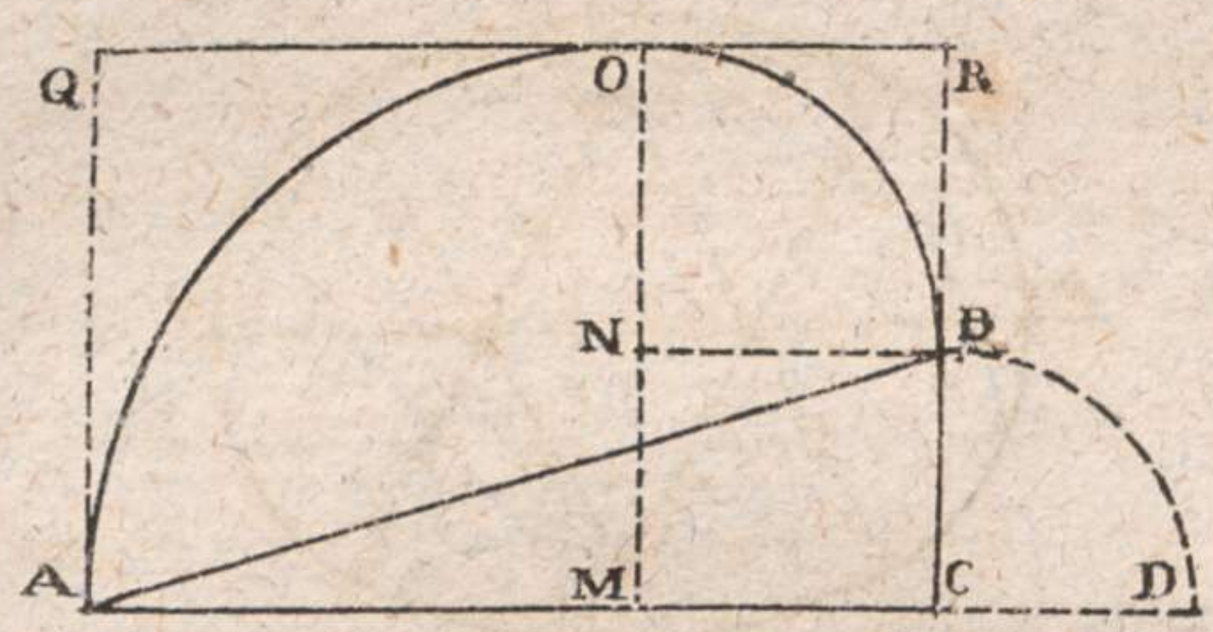
434. **Aufgabe.** Einen überhobenen Bogen zu zeichnen, wovon die Höhe und Breite gegeben ist.



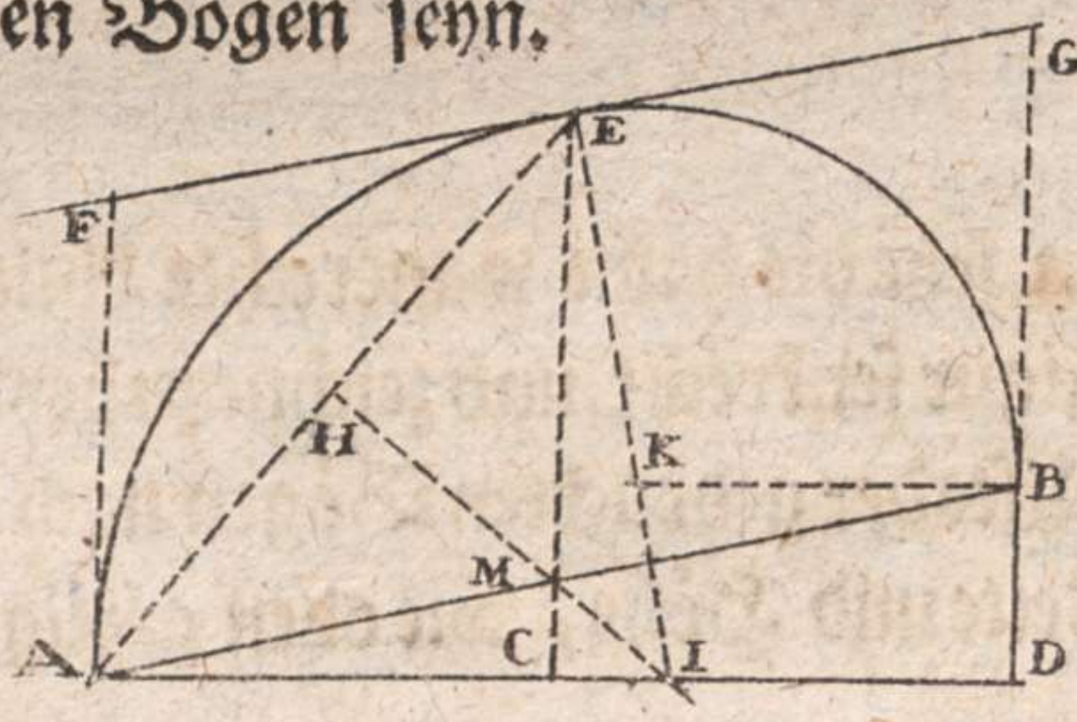
Man setze die halbe wagerechte Linie A B der vorigen Figur senkrecht, und zeichne zu beyden Seiten die Hälfte der gedruckten Bögen nach der gegebenen Weite und Höhe, wie oben gezeigt wurde, daran.

435. **Aufgabe.** Einen steigenden Bogen mit Kreisstücken zu zeichnen, daß die Scheitellinie wagerecht auf den Wiederlagen steht.

Die Linie A B wird die Steigungslinie, und Q R die Scheitellinie genannt.



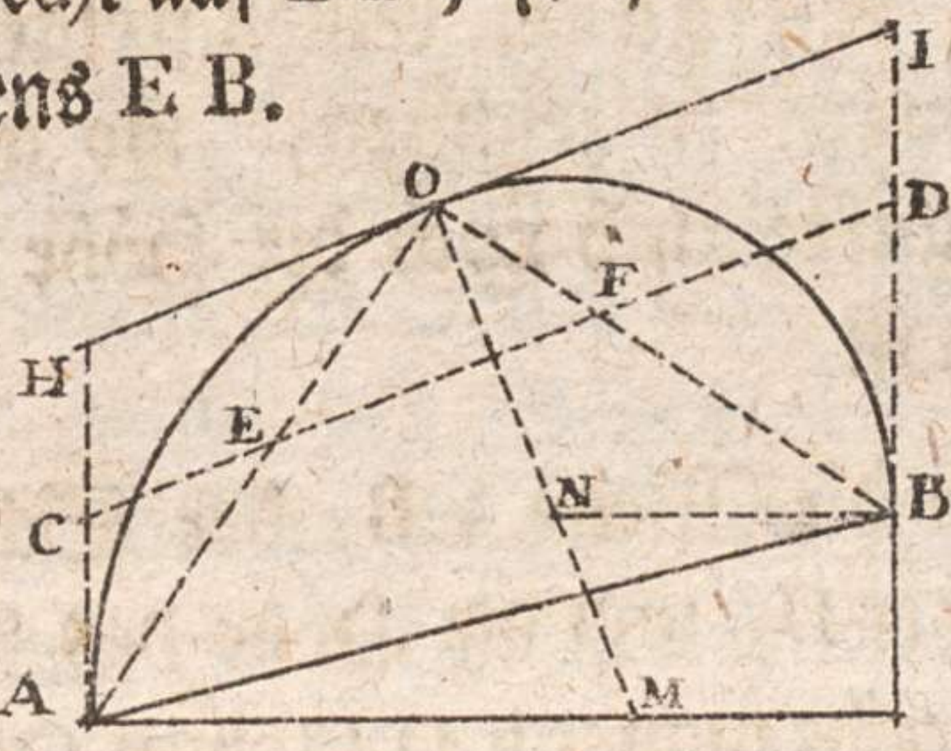
Man ziehe die Horizontale A C D, trage B C in D; theile A D bey M in zwey gleiche Theile; errichte M O senkrecht, und B N aus B ebenfalls; so ist N der Mittelpunkt des kleinern, und M der Mittelpunkt des größern Bogens, über welche die Scheitellinie Q R, als ihre gemeinschaftliche Tangente gezogen werden kann. Die Wiederlagen bey A und B müssen hier, wie bey allen Gewölbe-Bögen ebenfalls Tangenten ihrer beyderseitigen Bögen seyn.



436. **Aufgabe.** Einen steigenden Bogen mit Kreisstücken zu zeichnen, wo die Scheitellinie mit der Steigungslinie parallel läuft.

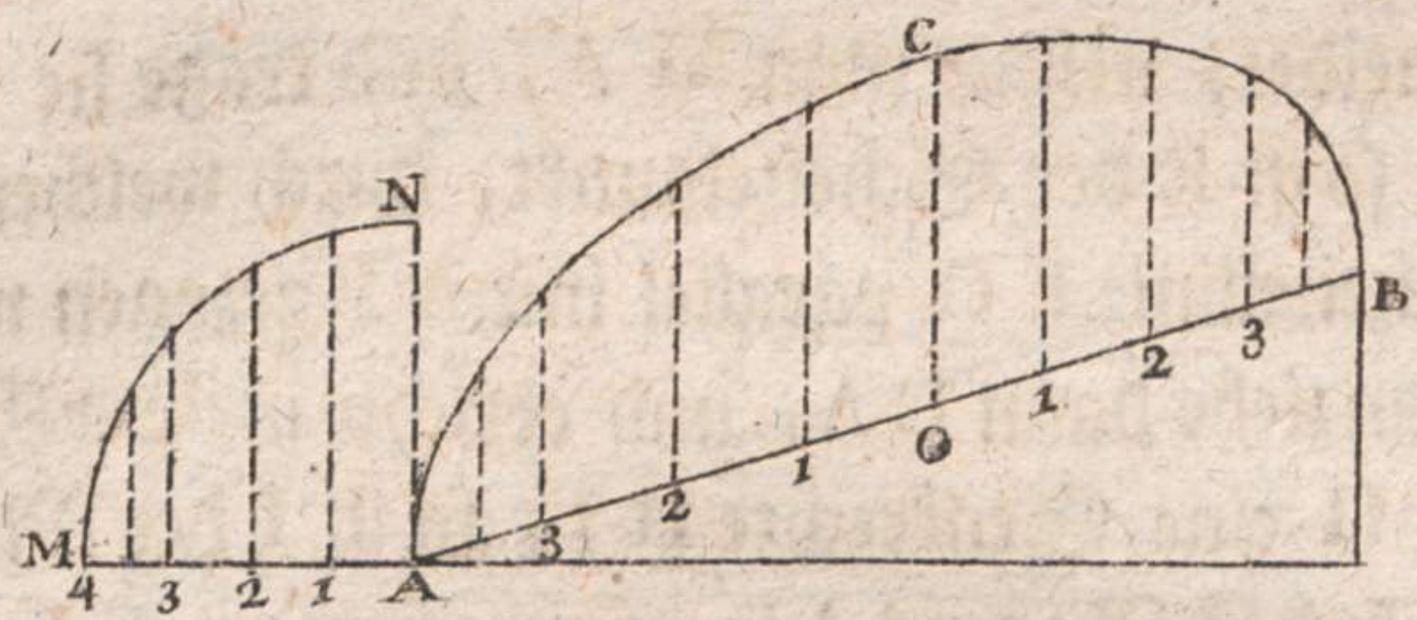
Es sey A B die Steigungslinie, so ziehe man A D, theile sie bey C in zwey gleiche Theile, und errichte C E senkrecht; wo diese A B bey M

schneidet, nehme man M A, und trage sie nach E: so ist E der Scheitelpunkt, durch welchen die Scheitellinie F G parallel mit A B gezogen wird. Man ziehe dann E A, und errichte in ihrer Mitte bey H eine Senkrechte H I; so ist I der Mittelpunkt des Bogens A E. Ziehe ferners E I, und B K senkrecht auf B D; so ist K der Mittelpunkt des Bogens E B.



437. **Aufgabe.** Einen steigenden Bogen mit Kreisstücken zu zeichnen, wo die Scheitellinie weder parallel mit der Steigungs-Linie, noch wagerecht auf den Wiederlagen steht.

Es sey A B die Steigungs-Linie, C D die Scheitellinie: so trage man C A in E, B D in F, und ziehe E A und F B; wo sich diese bey O schneiden, ist der eigentliche Scheitelpunkt, durch welchen die Scheitellinie H I parallel mit C D gezogen wird. Ziehe ferners auf H I bey O eine Senkrechte O M, und auf A C bey A eine andere Senkrechte A M; so ist M der Mittelpunkt des Bogens A O; und zieht man B N senkrecht auf B D, so ist N der Mittelpunkt des Bogens O B.

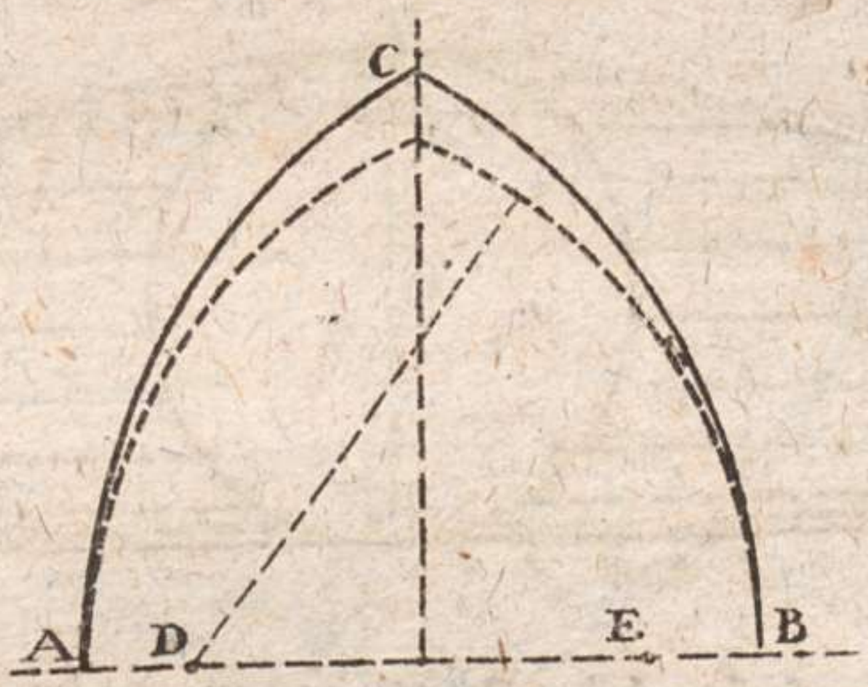


438. **Aufgabe. Einen steigenden Gewölbe-Bogen zu zeichnen, wo außer dem Scheitelpunkte auch noch die Höhe und Weite gegeben ist.**

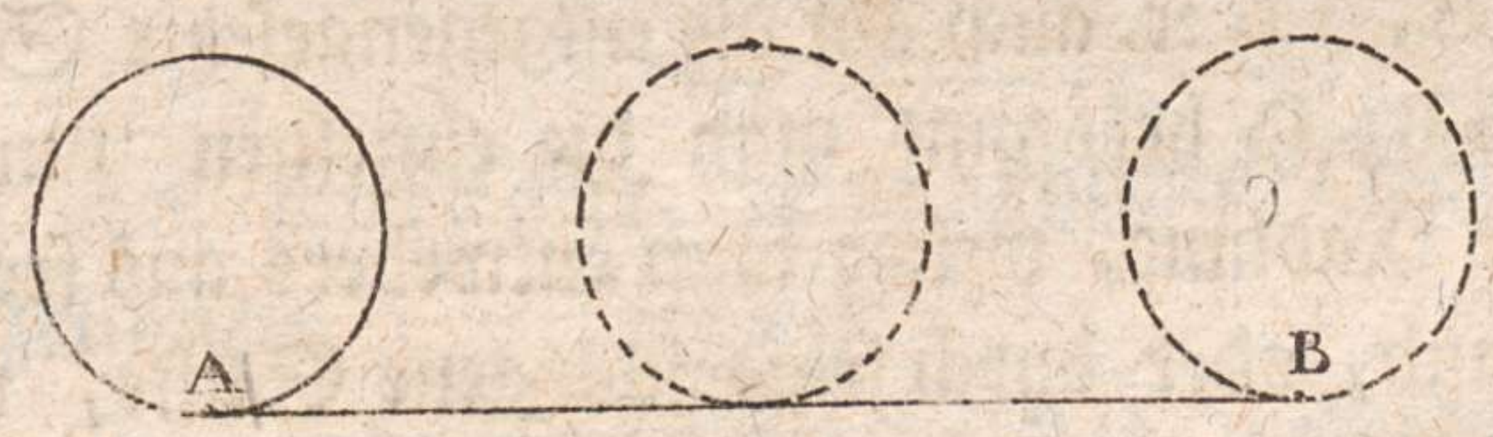
Es sey die Weite A B, der Scheitelpunkt senkrecht über O, und die Höhe des Bogens O C; so beschreibe man mit O C einen Quadranten A M N, theile A M in mehrere gleiche Theile, hier in 4; den letztern aber bey M 4 noch in zwey andere, und errichte lauter Senkrechte, wie die Figur zeigt. Theile ferners A O und O B, jede in eben so viele gleiche Theile als A M, ziehe sie alle parallel mit O C, und gebe ihnen die nähmliche Höhe; wie denen bey A M nach der Ordnung der Zahlen 1 2 3 4; so können in die obern Endespunkten Stifte geschlagen, an diese eine biegsame Latte angelegt, und darnach der steigende Bogen gezogen werden.

439. **Aufgabe. Einen gothischen Gewölbe-Bogen zu zeichnen.**

Da die Wiederlagen Tangenten mit den Bögen machen sollen; so stehen die Mittelpunkte

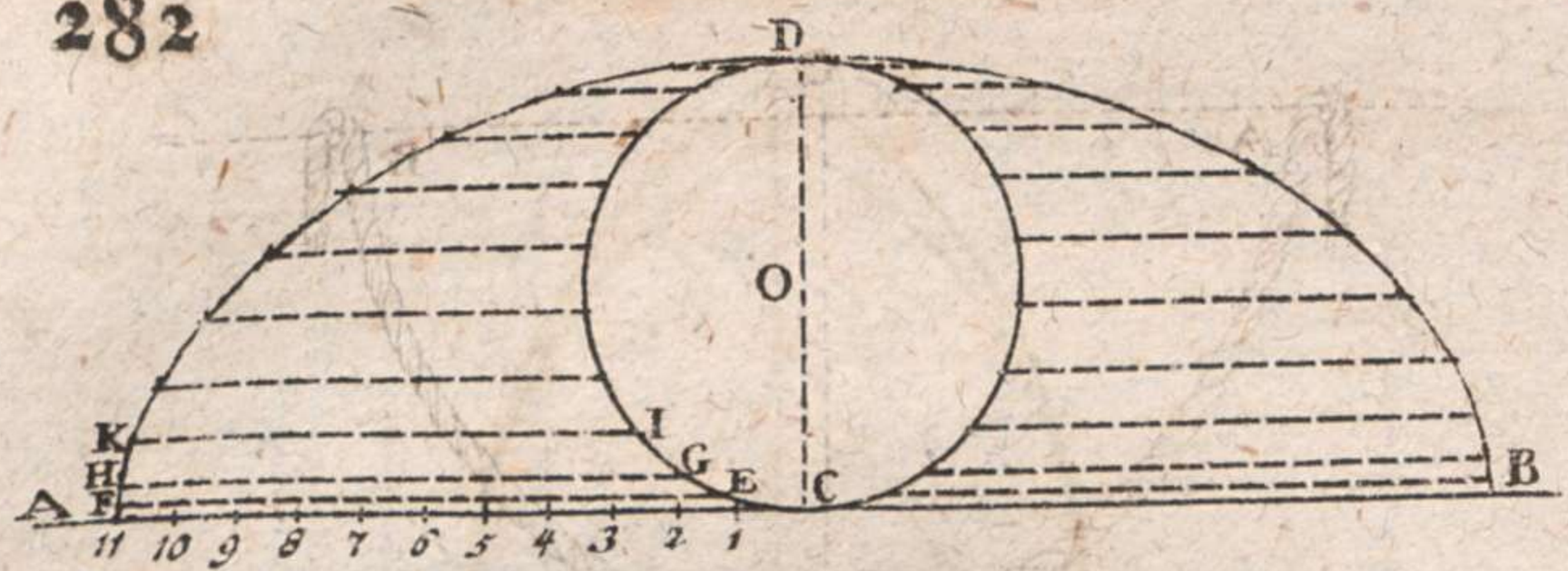


wieder senkrecht auf den Wiederlagen, nähmlich auf der Linie A B. Man setze daher den Zirkel in A, und mache den Bogen B C, setze ihn dann in B, und mache den Bogen A C; so gibt dieß einen gothischen Gewölbe-Bogen. Man kann sich auch auf der Linie A B andere Punkte z. B. D und E wählen, und den Zirkel von D bis B öffnen, wo aber der Bogen niederer wird. Setzt man ihn außerhalb A und B; so wird derselbe höher als der Bogen aus A und B.



440. **Erklärung.** Diejenige Linie, welche ein Punkt A eines Rades in seinem Fortlaufen nach B, wo er auf A B bis B seine ganze Kreislinie entwickelt hat, beschreibt, wird die Radlinie (Zykloide) genannt.

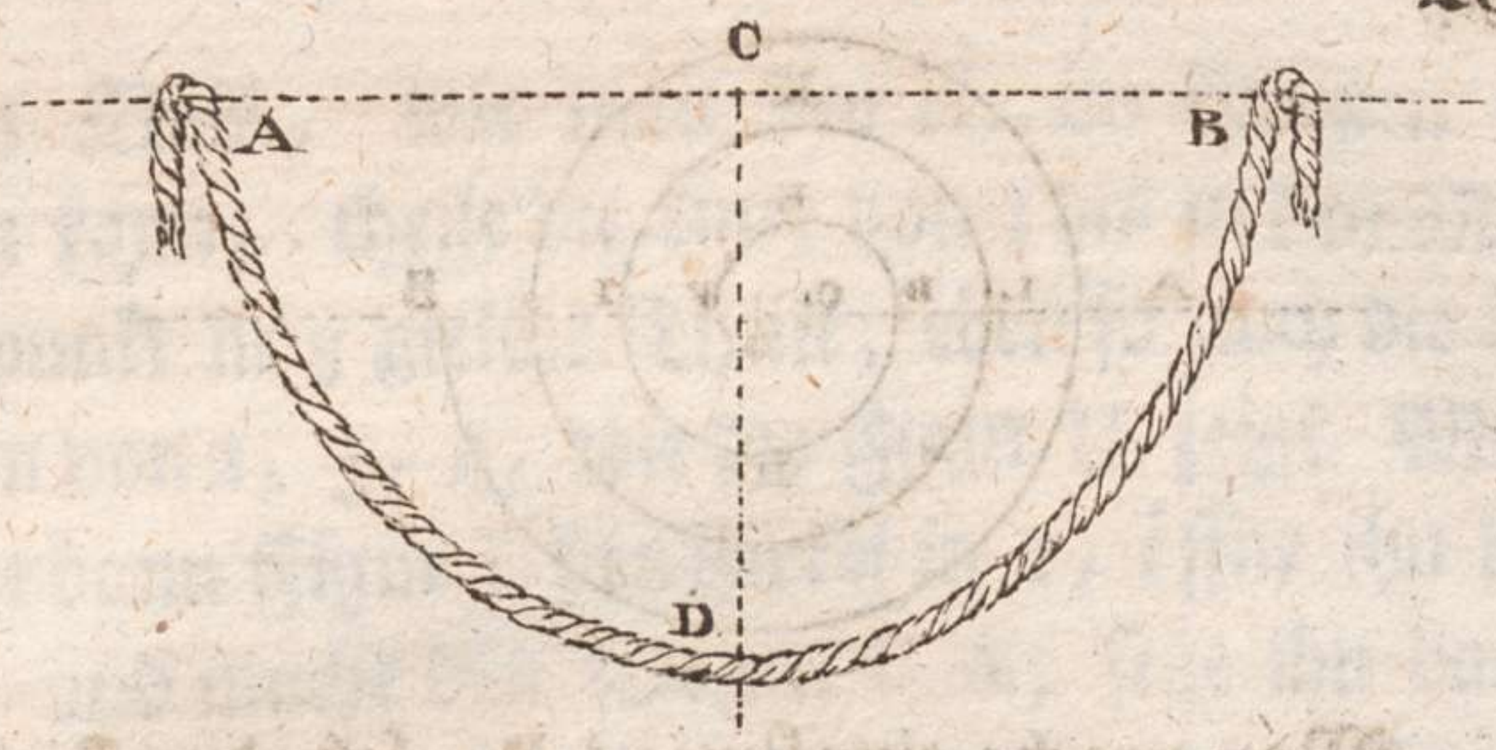
441. **Aufgabe.** Eine Radlinie zu zeichnen.



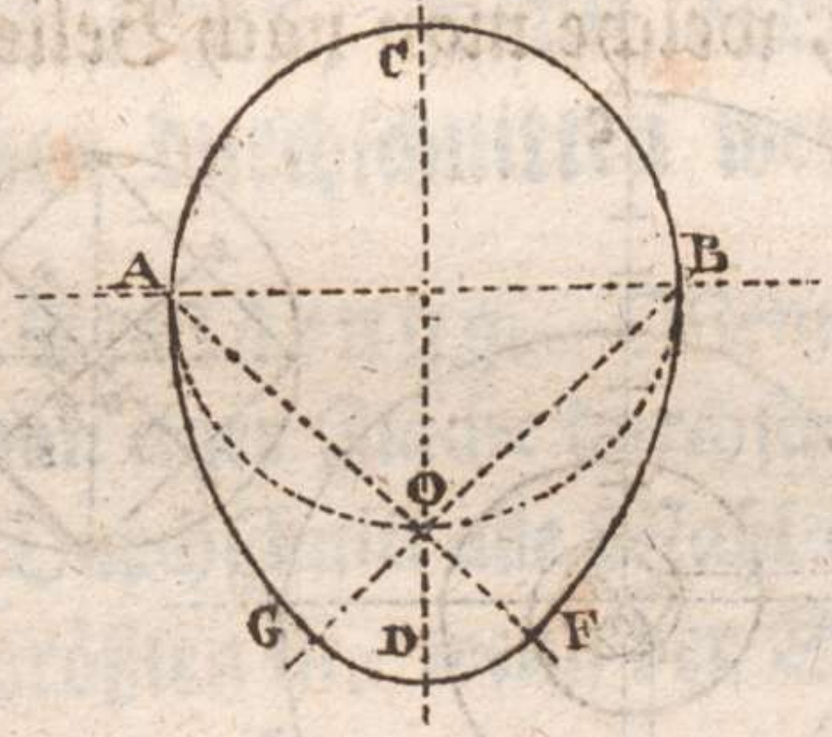
Man ziehe die Linie A B unbestimmt; mache die Senkrechte C D; theile auf C A eilf Theile, und auf C D sieben; so hat man den Durchmesser, und die halbe Peripherie. Man trage ferners C A nach B, halbire C D, und mache mit O C einen Kreis; nehme C 1, und trage es auf die halbe Peripherie eilf Mahl, ziehe dann die Parallellinien E F, G H, I K, und verlängere sie auf die entgegengesetzte Seite gegen B. Man nehme nun C 10, und trage sie auf E F, C 9 auf G H, D 8 auf I K, und so fort, bis man nach D kömmt. Trage dann die Längen E F, G H, I K ꝛc. auch auf die entgegengesetzte Seite bey B; so bekömmt man die einzelnen Punkte der Radlinie, welche man entweders aus freyer Hand, oder durch eingeschlagene Stifte, und ein biegsames Lineal zusammen ziehen kann.

442. **Aufgabe. Eine Kettenlinie zu zeichnen.**

Man ziehe eine Wagrechte A B, und eine Senkrechte C D, bestimme auf dieser die Höhe, welche der Bogen haben soll, und auf A B die Weite desselben; nehme dann eine Kette oder Seil, befestige es in A, und ziehe bey B so lange an, bis



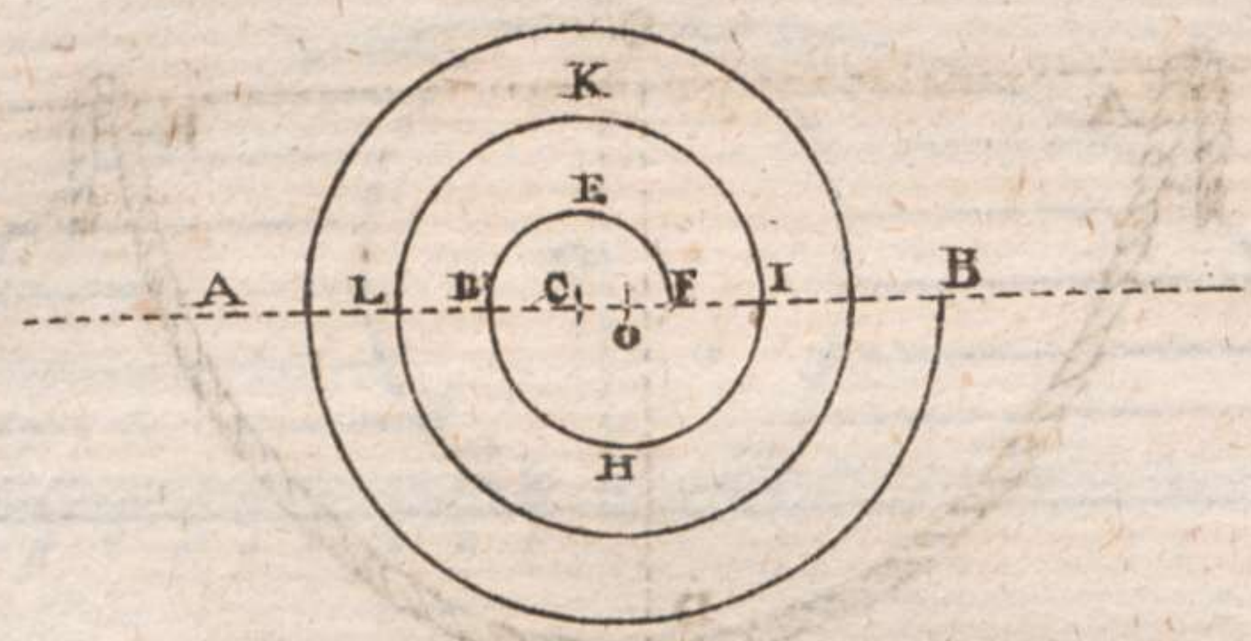
es den bestimmten Punkt bey D erreicht. Wird nun nach der Krümmung des Seiles eine Linie gezogen; so ist diese die Kettenlinie, welche unter allen krummen Linien als die dauerhafteste für die Gewölber angesehen wird.



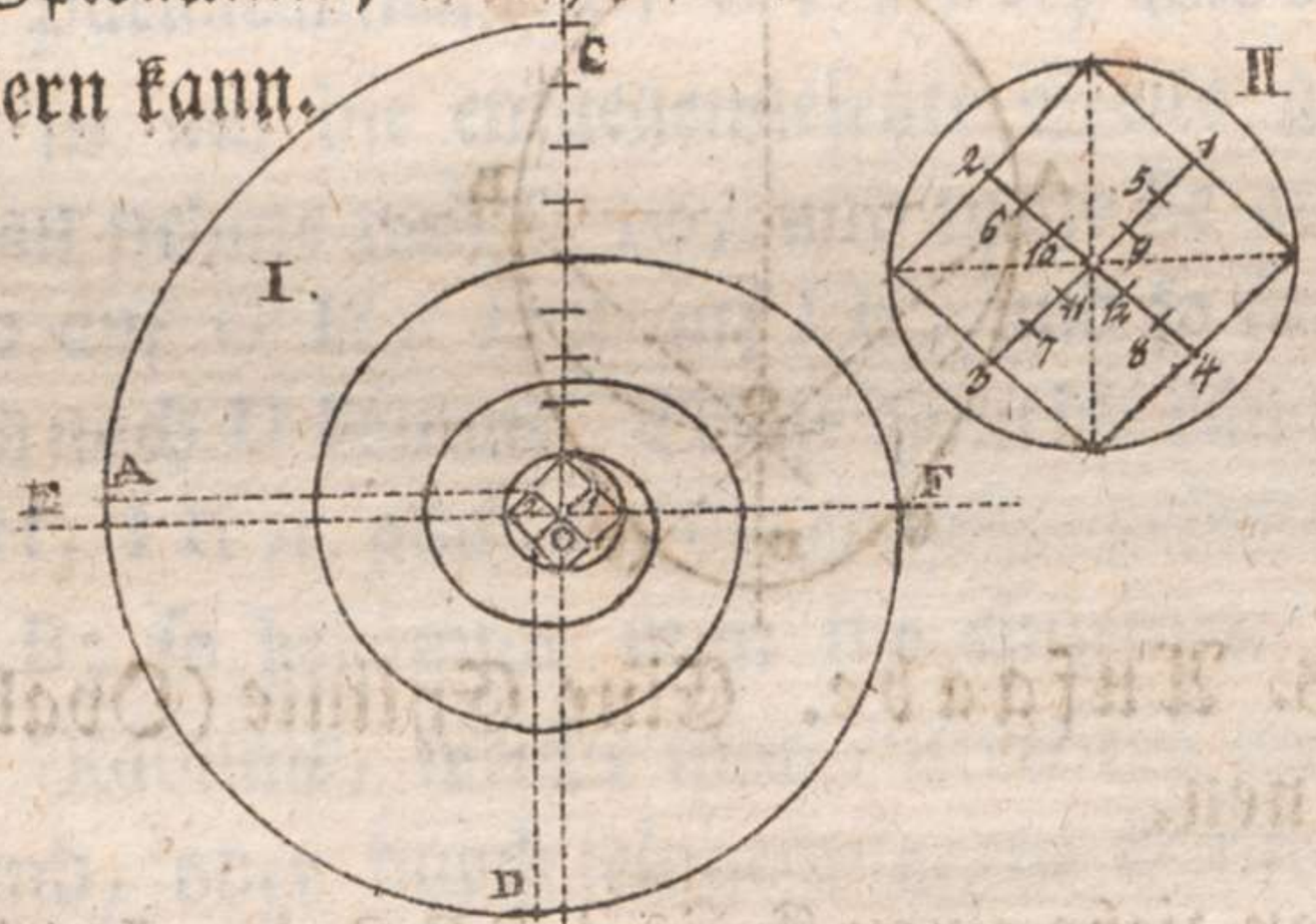
443. Aufgabe. Eine Eylinie (Oval) zu zeichnen.

Man ziehe einen Kreis A C B O, mache die Durchmesser A B und C O rechtwinklicht; ziehe durch O die Linie A F und B G, setze den Zirkel in A, öffne ihn bis B, und ziehe den Bogen B F; ieben so auch aus B, den Bogen A G; setze ihn dann n O, und ziehe G D F, so ist die Eylinie vollendet.

444. Aufgabe. Eine Spirallinie zu zeichnen.



Man mache eine Linie AB, setze den Zirkel in C, und ziehe den Bogen DEF; theile dann CF in zwey gleiche Theile; setze den Zirkel in O und mache den Bogen D H I; setze ihn dann in C, und mache den Bogen I K L; so entsteht, wenn dieses Verfahren fortgesetzt wird, eine Spirallinie, welche man nach Belieben vergrö-ßern kann.



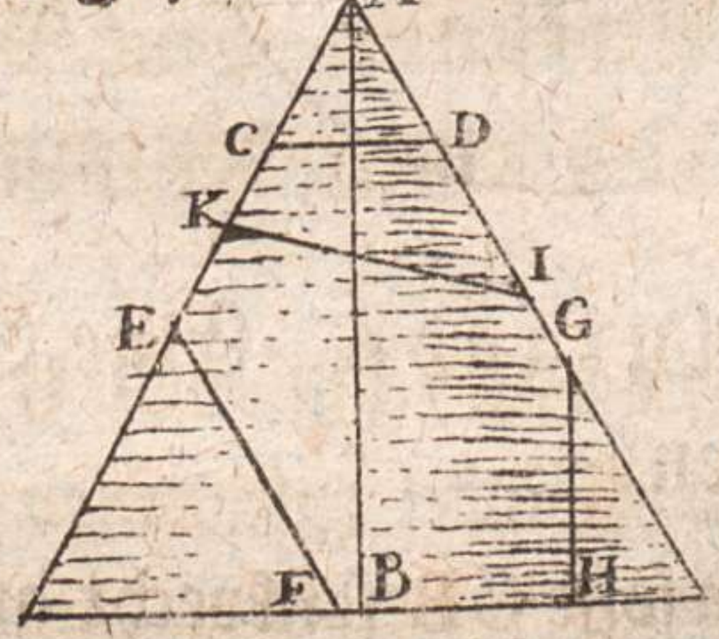
445. Aufgabe. Eine Schnecken-Linie zu ziehen.

I. Man setze CB senkrecht auf EF, mache auf dem Durchschneidungs-Punkte mit einer beliebigen Zirkelöffnung einen Kreis; trage den Halbmesser desselben neun Mahl von dem Mittelpunkte O bis C; zeichne dann ein Quadrat in

den Kreis, wie man bey II. im Großen sehen kann; theile die Linie von 1 bis in den Mittelpunkt in 3 gleiche Theile; eben so auch die Linien von 2, 3, 4, wie die Figur II. zeigt. Man setze dann Figur I. den Zirkel in 1, öffne ihn bis C, und mache den Bogen C A; setze ihn dann in 2, öffne ihn bis A, und mache den Bogen A D; und so fort nach der Reihe der Zahlen, bis die Figur geschlossen ist.

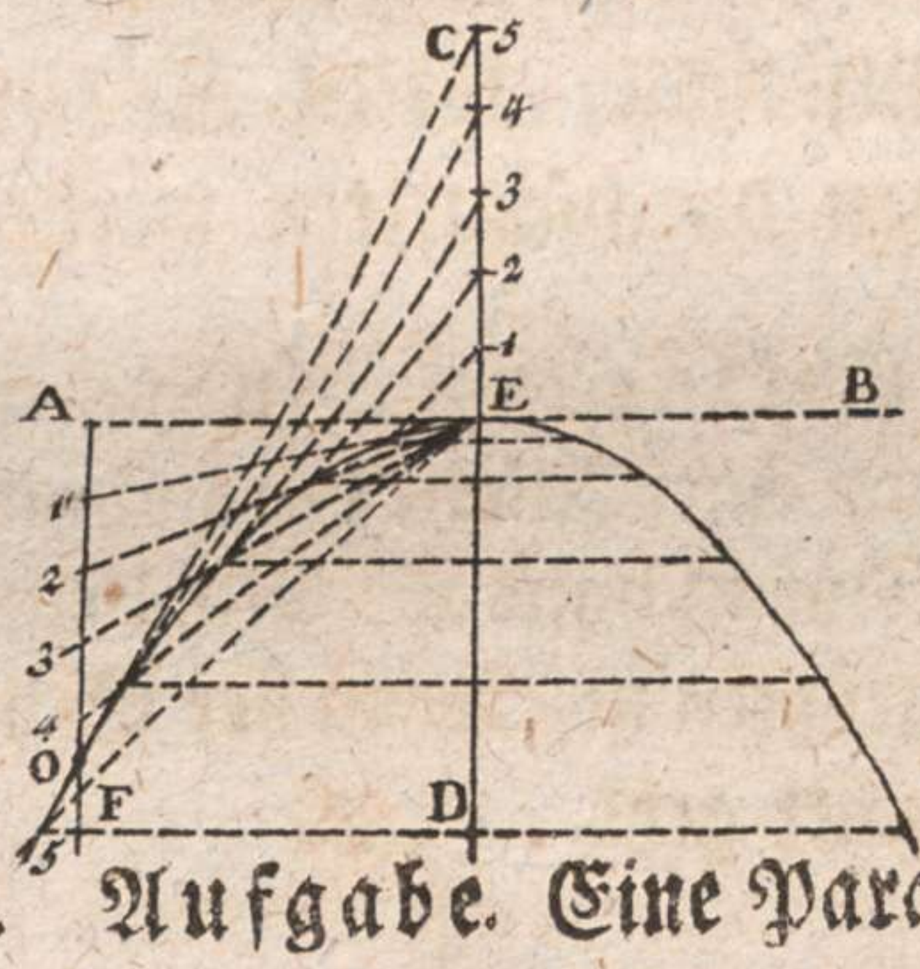
Von den vorzüglichsten Linien, welche entstehen, wenn Körper von Flächen durchschnitten werden.

446. **Erklärung.** Wenn eine Kugel wie immer von einer Fläche durchschnitten wird, so gibt der Durchschnitt alle Mahl einen Kreis, welcher am größten ist, wenn der Schnitt durch den Mittelpunkt geht.



447. Wenn ein Kegel durch seine Achse A B geschnitten wird, so gibt der Schnitt ein Dreyeck. Schneidet man ihn parallel mit seiner Grundfläche, so macht der Durchschnitt C D

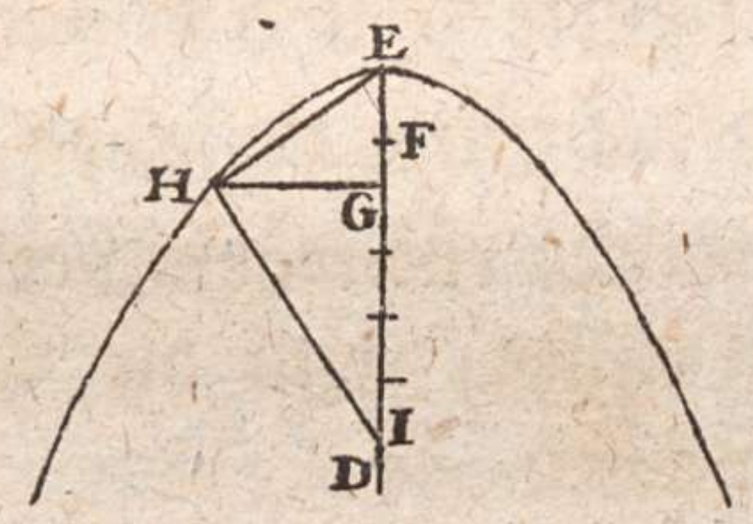
einen Kreis. Wird er parallel mit einer Seite wie E F geschnitten; so gibt der Schnitt auf der gebogenen Oberfläche eine Parabel. Geht der Schnitt parallel mit der Achse, wie G H, so hat man eine Hyperbel; und durch einen mit der Grundfläche schiefen Schnitt entsteht I K eine Ellipse. Durch das wirkliche zerschneiden eines Kegels wird die Sache anschaulich. Die Parabel, die Hyperbel, und die Ellipse werden, weil sie aus den Schnitten des Kegels entstehen, auch **Kegelschnittslinien** genannt.



448. **Aufgabe. Eine Parabel zu zeichnen, die durch einen bestimmten Punkt O geht.**

Man setze zwey Linien A B und C D unter einem rechten Winkel zusammen, wovon E D die Achse genannt wird; bestimme den Punkt O, durch welchen die Parabel gehen soll, und ziehe durch selben die Linie A F parallel mit C D; mache mehrere gleiche Punkte auf A F und C E; ziehe die Punkte 1, 2, 3, 4, 5 der Linie C E nach

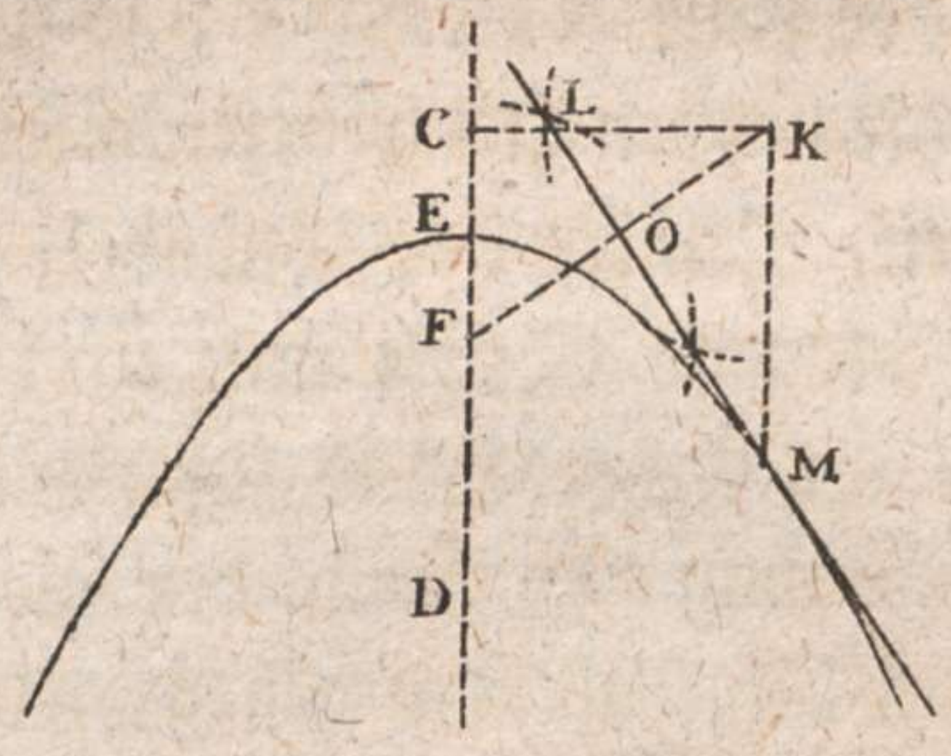
O, und die der Linie A F nach E; so sind überall, wo sich die beyden gleich bezeichneten Linien durchschneiden, Punkte der Parabel, die man durch eingeschlagene Stifte und ein biegsames Lineal, oder aus freyer Hand zusammen ziehen kann, wodurch man eine Seite der Parabel erhält, die durch den Punkt O gehen wird. Zieht man aus den erhaltenen Punkten Senkrechte auf die Achse E D, und verlängert sie unbestimmt; so können die Punkte auch auf die entgegengesetzte Seite getragen, und dadurch die ganze Parabel erhalten werden.



449. Aufgabe. Den Brennpunkt der Parabel zu finden.

Man ziehe auf einen beliebigen Punkt der Achse E D eine Senkrechte; G H dann auf H E aus dem Punkte H eine andere Senkrechte H I; so ist G I der Parameter. Wird dieser in vier gleiche Theile getheilt, und ein Theil von E nach F getragen; so gibt F den Brennpunkt (Fokus) der Parabel.

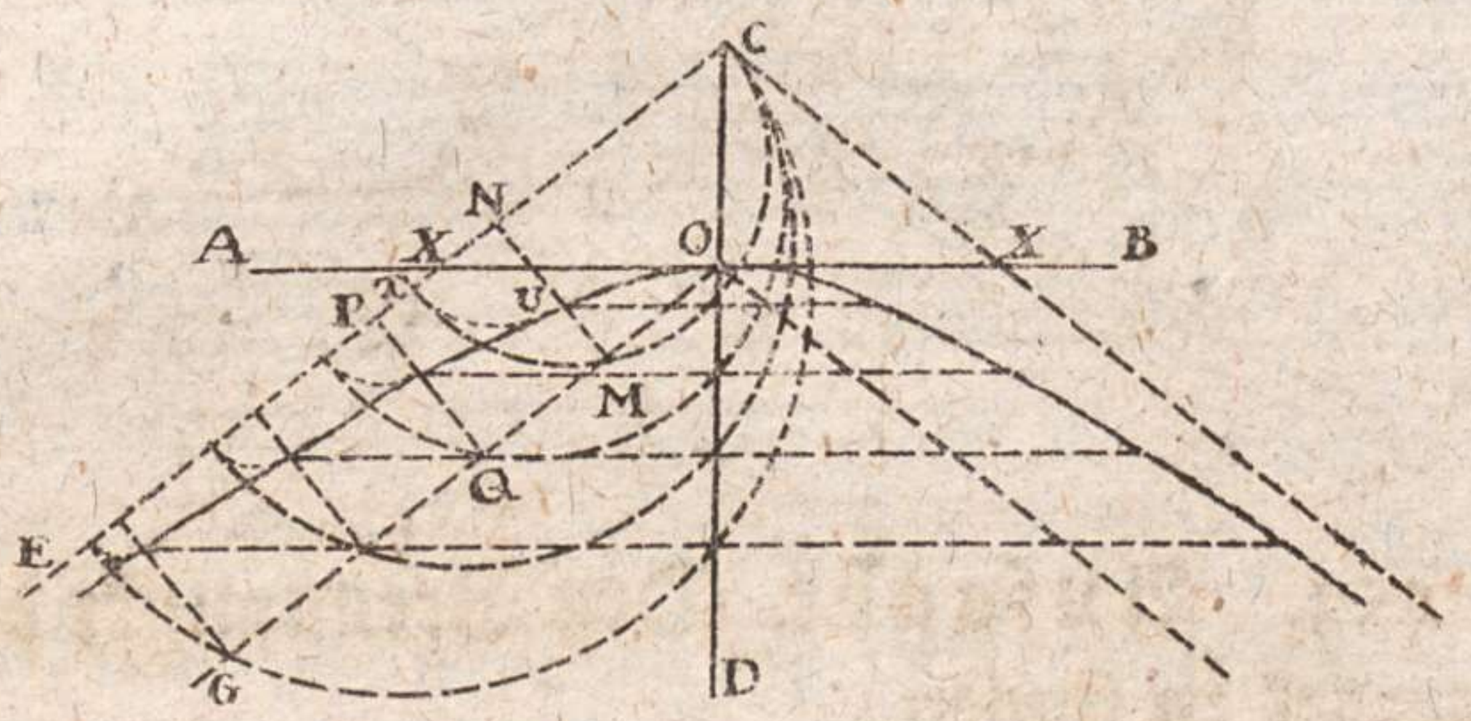
450. Aufgabe. Durch einen auf der Parabel gegebenen Punkt M eine Tangente zu ziehen.



Man suche zuvor den Brennpunkt F; trage die Entfernung desselben vom Scheitel E, nähmlich E F von E nach C, und ziehe C K senkrecht auf C D; aus M aber die Senkrechte M K; verbinde die Punkte K und F mit einer Linie, und errichte auf der Mitte derselben O eine Senkrechte, L O, welche rückwärts verlängert durch den Punkt M gehen, und die Tangente der Parabel bilden wird.

451. **Anmerkung.** Die Parabel hat die Eigenschaft, daß die Strahlen eines Lichtes, welches sich in dem Brennpunkte befindet, alle parallel mit der Achse zurückgeworfen werden. Befindet sich aber eine Flamme außerhalb der Parabel, so konzentriren sich die Strahlen alle in dem Brennpunkte F, woraus sich die Wirkung der paraboliſchen Brennspiegel erklären läßt. Die nähmliche Beschaffenheit hat es mit dem Schalle, oder der Stimme des Menschen. Geworfene, oder aus Feuerröhren unter einem Winkel abgeschossene Körper, wie Bomben, und an-

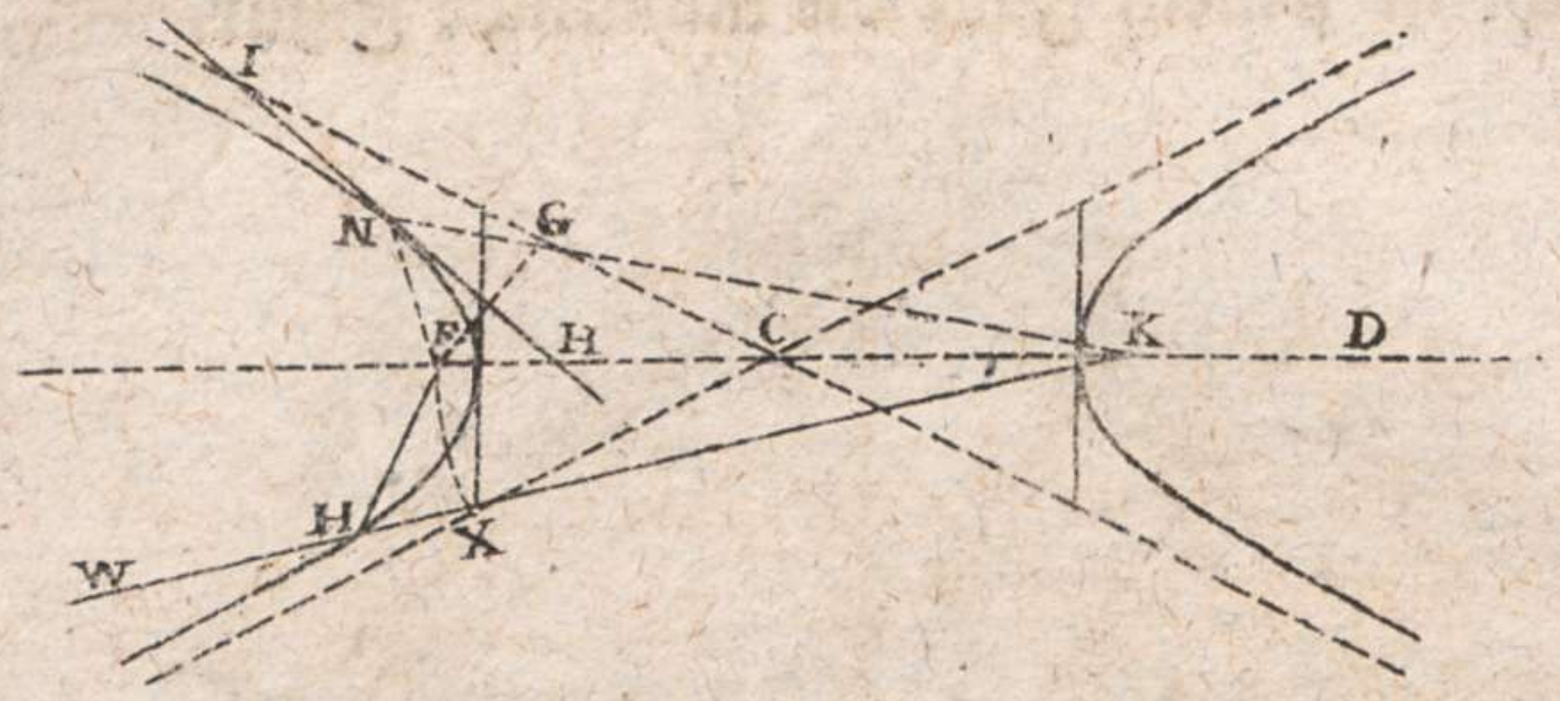
dere Kugeln, beschreiben in ihrem Laufe eine Parabel. Das aus Gerinnen abschießende Wasser macht in seinem Falle die nähmliche Figur.



452. **Aufgabe. Eine gleichseitige Hyperbel zu beschreiben.**

Man setze ein Paar Linien A B und C D rechtwinklicht zusammen; ziehe C E unter einem beliebigen Winkel, und mit dieser O G parallel: so geben C O, und O X die beyden halben Achsen der Hyperbel. Man mache dann mit einer willkührlichen Zirkelöffnung verschiedene Bögen, die alle in C anfangen; wo diese die Linie O G durchschneiden, fälle man Perpendikel M N, P Q ꝛc. auf die Linie C E; setze den Zirkel in N; öffne ihn bis T, und beschreibe einen Bogen, welcher N M in U schneidet, und bey U einen Punkt der Hyperbel gibt. Wird nun mit allen übrigen Perpendikeln auf die nähmliche Art verfahren, und die dadurch erhaltenen Punkte auf die entgegengesetzte Seite, wie bey der Parabel ge-

tragen; so erhält man durch das Zusammenziehen derselben die verlangte Hyperbel.



453. Aufgabe. Den Brennpunkt der Hyperbel zu finden.

Man setze den Zirkel in C, öffne ihn bis X und beschreibe den Bogen X F; so ist F der Brennpunkt der Hyperbel. Trägt man aus C den Punkt F nach K, so hat man den Brenn-Punkt einer Hyperbel, welche entstünde, wenn man den Schnitt parallel mit der Achse C D rückwärts gegen K richten, und einen ähnlichen Kegel, der mit der Spitze bey C an den ersten stossen würde, durchschnitten hätte.

454. Aufgabe Durch einen gegebenen Punkt N der Hyperbel eine Tangente zu ziehen.

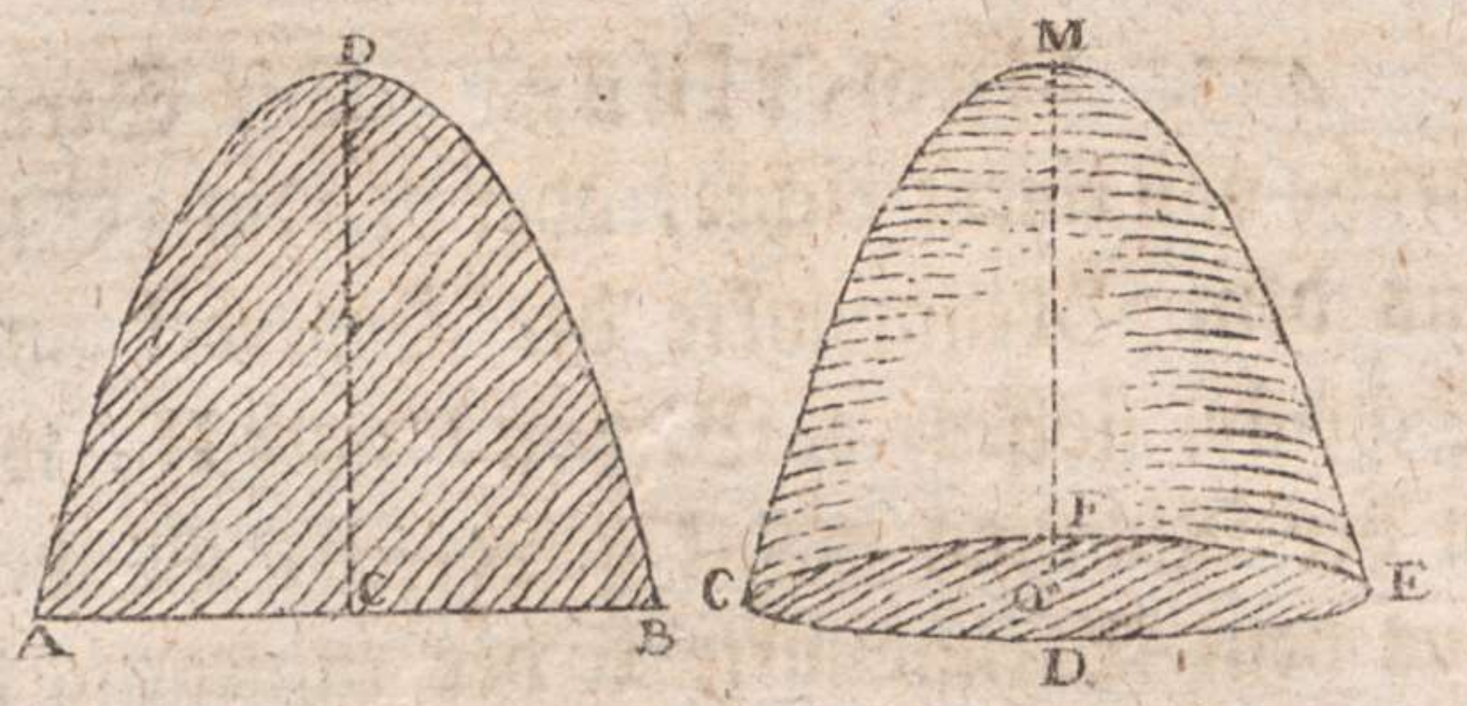
Man ziehe auf die beyden Brennpunkte F und K die Linien N F und N K; setze den Zirkel in N; öffne ihn bis F, und trage N F in G, ziehe dann auf die Mitte von G F eine Senkrechte H I: so ist diese die verlangte Tangente, die durch den gegebenen Punkt N gehen wird.

455. **Anmerkung.** Die Strahlen, welche von einem Lichte, oder von einer Stimme aus dem Brennpunkte der Hyperbel an ihre Schenkel stossen, z. B. von F nach H, werden in der Richtung zurück geworfen, als wenn sie aus dem Brennpunkte K der entgegengesetzten Hyperbel kämen: ihre Richtung ist daher H VV, woraus man sieht, daß die hyperbolische Figur zur Verbreitung des Lichtes, und des Schalles sehr geschickt ist; deswegen man sie auch zu Lampen gebraucht. Man kann sich derselben noch zu Rückwänden von Kaminen in den Zimmern bedienen; weil dadurch die Wärme des Feuers, welches sich in dem Brennpunkte befinden muß, sehr weit auseinander geworfen, und daher das Zimmer wohl erwärmt wird.

Dreht man eine Parabel um ihre Achse, oder eine Hyperbel um ihre verlängerte Achse C D; so beschreibt die erste einen Körper, den man eine Paraboloide, und die zweyte einen andern, den man eine Hyperboloide nennt. Da die letzte sehr selten vorkömmt, so wollen wir hier bloß die erste, nähmlich die Paraboloide betrachten, zuvor aber noch die Parabelfläche berechnen.

456. **Aufgabe.** Den Quadratinhalt einer Parabelfläche A D B C zu berechnen.

Fig. I.

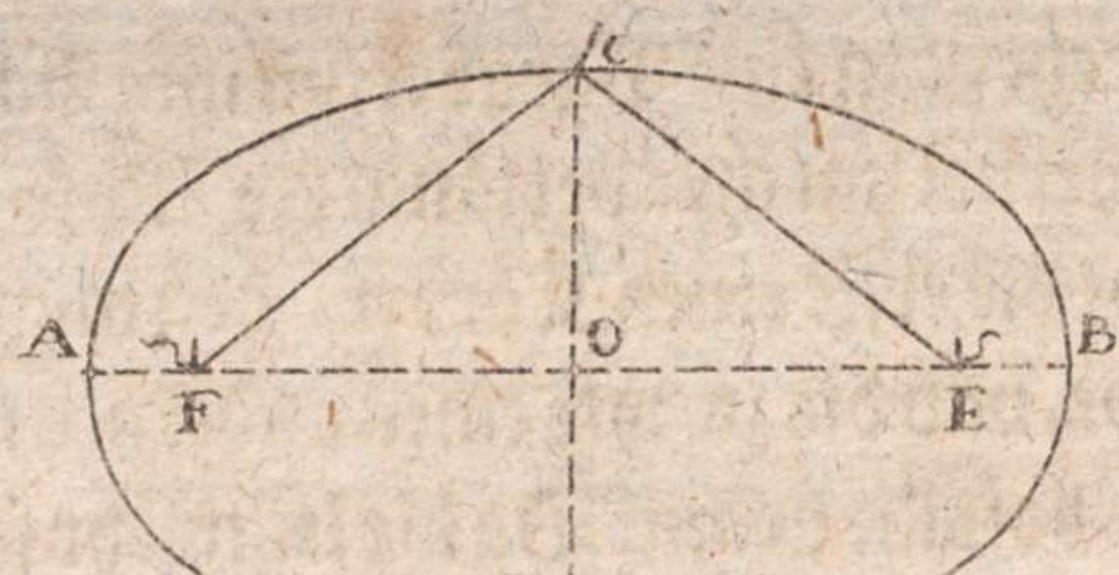


Man nimmt zwey Drittheile von dem Produkte, welches entsteht, wenn man A B mit C D multiplizirt. Es ist also die Parabelfläche gleich

$$\frac{AB \times BC \times 2}{3}$$

457. Aufgabe. Den Kubikinhalt einer Paraboloide zu finden. Fig. II.

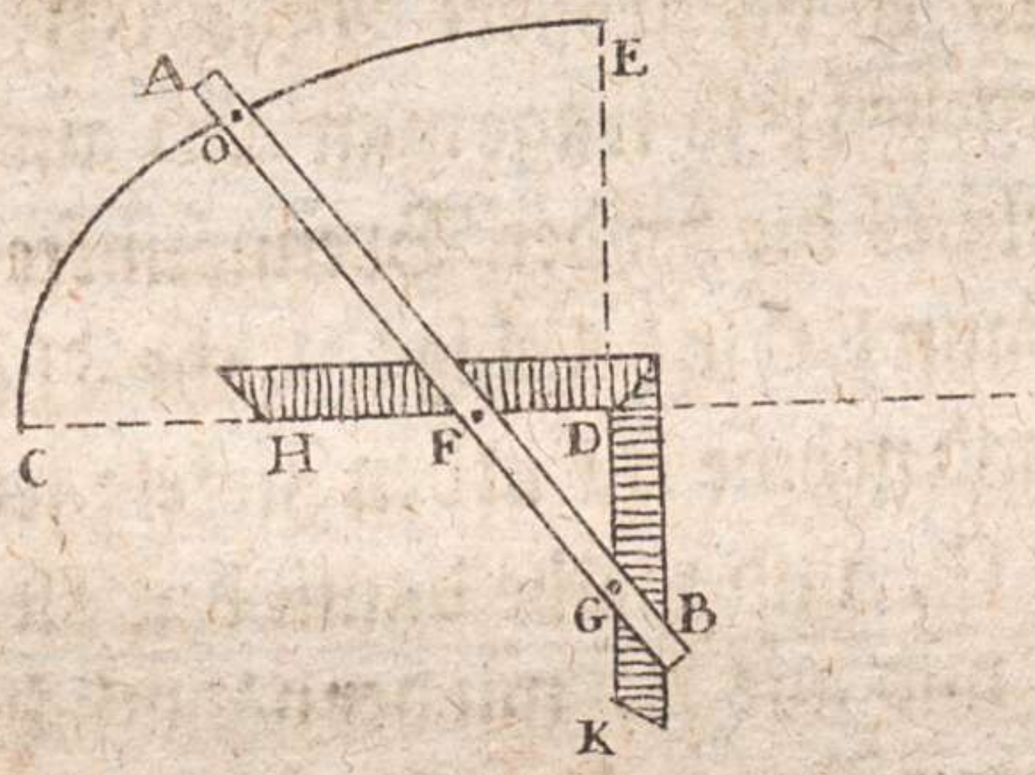
Er besteht aus der Multiplikation der Grundfläche C D E F mit der Höhe O M dividirt durch 2.



458. Aufgabe. Eine Ellipse zu beschreiben, wovon die beyden Achsen oder die Länge und Breite gegeben ist.

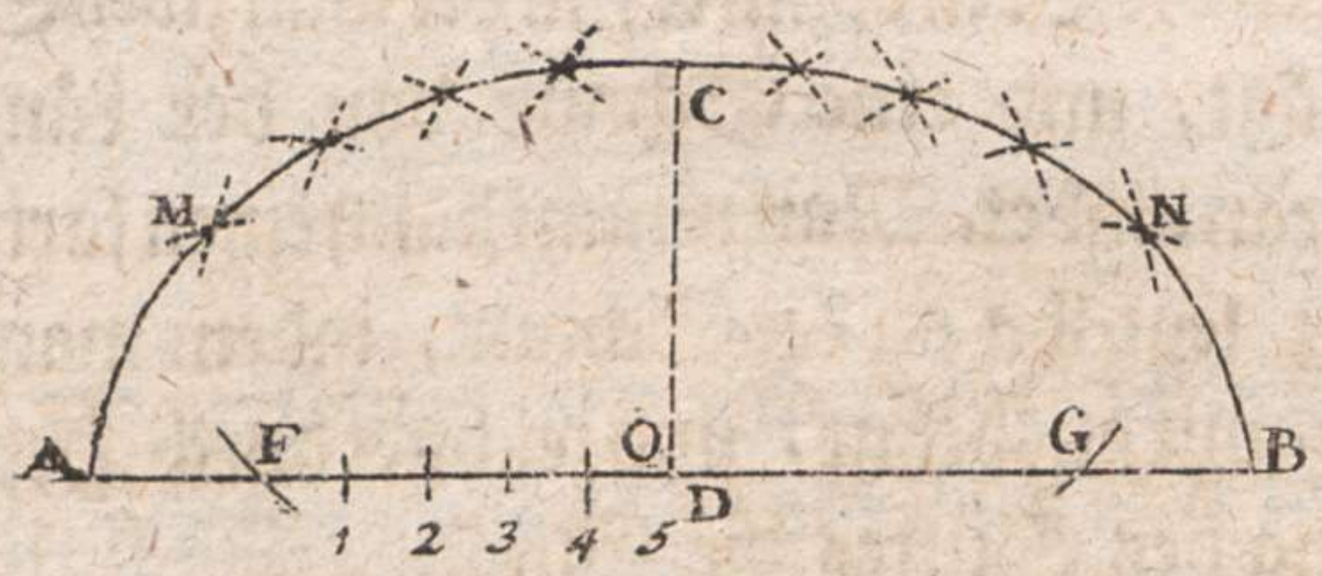
Man setze A B und C D rechtwinklicht zusammen; fasse die halbe größere Achse in den Zirkel, und trage sie von O in A und B; die hal-

be kleinere aber von O nach C und D; setze den Zirkel in C, und mache mit der Oeffnung von O A die Durchschnitte bey E und F: so sind diese beyden die Brennpunkte, in die man zwey Stifte einschlägt, und eine Schnur von der Länge E CF daran bindet. Man nimmt dann einen farbigen Stift; legt ihn an die Schnur, indem man dieselbe damit ausdehnt, und zeichnet durch Herumführung des Stiftes die Ellipse.



Läßt man sich eine Latte A B verfertigen, in die man bey O einen farbigen Stift befestigen kann; trägt die beyden halben Achsen C D und D E von O nach F und G, und befestigt dort zwey kleine eiserne Stifte: so kann auch damit eine Ellipse gezeichnet werden, wenn man an H D K ein Winkelmaaß festhält, und die Latte mit den beyden Stiften an demselben so herumführt, wie die Figur zeigt. Durch dieses Verfahren wird die elliptische Linie etwas reiner als in dem vorhergehenden; es muß aber vier Mahl wiederholt werden, weil man nur alle Mahl ein Viertheil erhält.

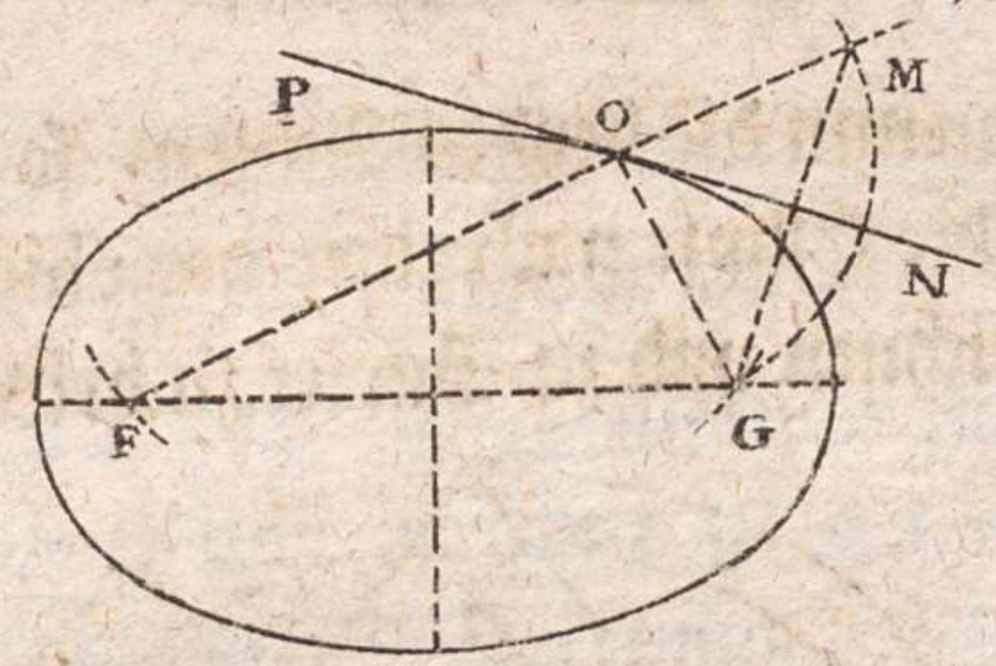
Da diese beyden Arten nur zur Ausübung im Grossen dienen, so wollen wir noch eine für die Zeichnung auf das Papier anführen:



Es sey die größere Achse A B, die kleinere C D gegeben; so trage man A O aus C in F und G, welches die beyden Brennpunkte gibt. Man theile dann F O in beliebige gleiche Theile 1, 2, 3, 4, 5, und nehme B 1 in den Zirkel; setze ihn in den Punkt G, und mache damit den kleinen Bogen bey M, und aus F, mit der nähmlichen Zirkelöffnung, den Bogen bey N. Nehme dann 1 A; setze den Zirkel in F und G, und durchschneide die Bögen bey M und N: so hat man überall einen Punkt der Ellipse. Nimmt man ferners B 2, und verfährt in Allem wie bey B 1; so kann man so viele Punkte erhalten, als man will, die man aus freyer Hand zusammen ziehen, und eine Ellipse daraus bilden kann.

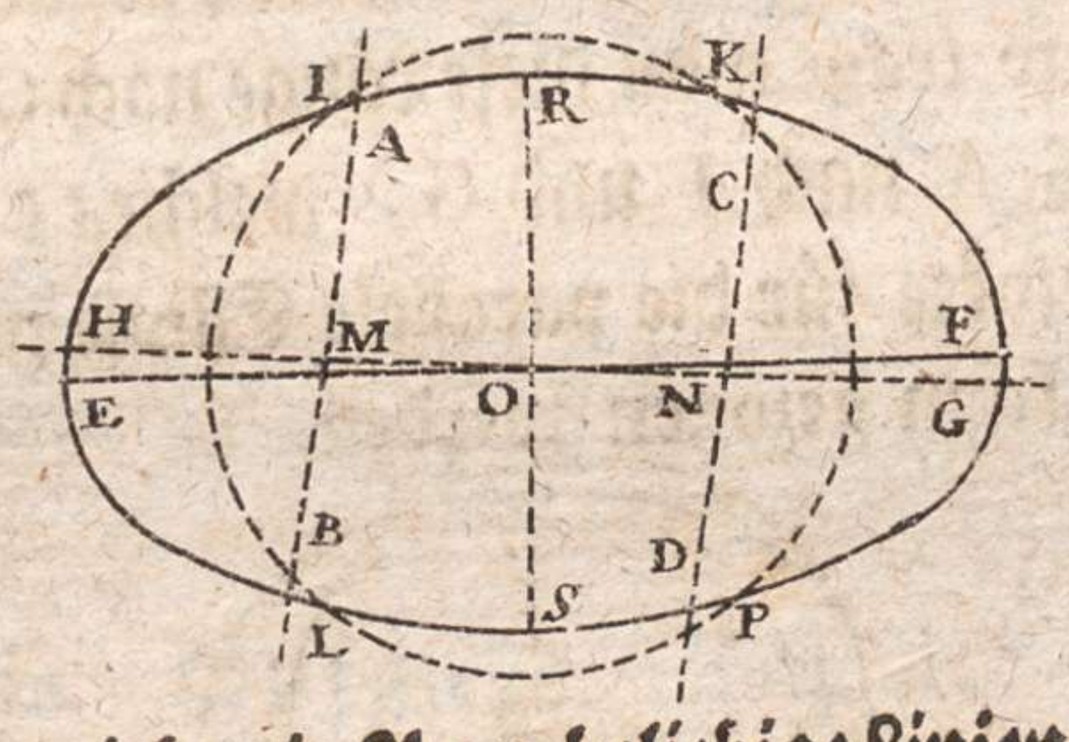
459. Aufgabe. Durch einen auf der Ellipse gegebenen Punkt O eine Tangente zu ziehen.

Man verbinde den Punkt O mit den beyden Brennpunkten F und G; trage O G nach M



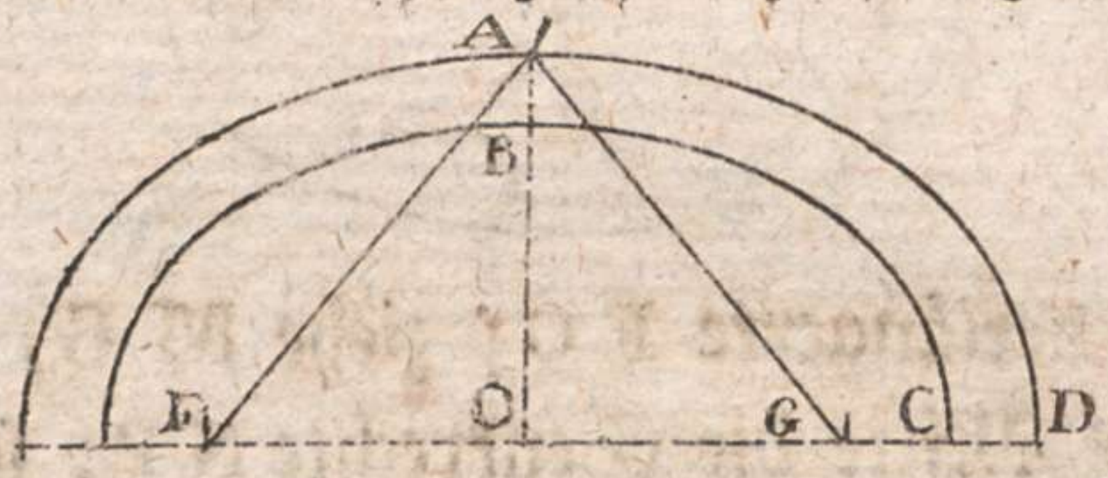
auf die verlängerte F O; ziehe M G, und setze auf ihre Mitte die Senkrechte N P: so ist diese die verlangte Tangente.

460. Aufgabe. Eine Ellipse, in der weder der Mittelpunkt noch eine Achse gegeben ist, auszumessen, und aufzuzeichnen.



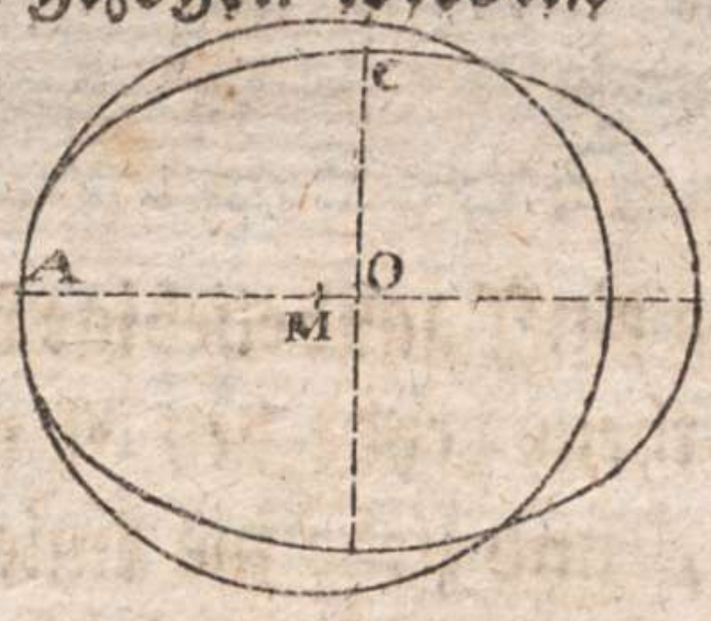
Man ziehe ein Paar beliebige Linien A B und C D parallel; theile beyde bey M und N in zwey gleiche Theile, und ziehe die Linie G H, welche ebenfalls in zwey gleiche Theile getheilt den Mittelpunkt O der Ellipse gibt. Man beschreibe ferners aus O einen Kreis, welcher die Ellipse in K und P, in I und L schneidet; theile die Weite I K und L P in R und S in zwey gleiche Theile, und ziehe durch diese beyden Punkte die Linie R S: so hat man die kleinere Achse, auf welche bey O die größere E F senkrecht gesetzt werden kann.

Mißt man nun die beyden Achsen, so ist man im Stande die Ellipse nach einer der obigen Aufgaben zu zeichnen und zu Papier zu bringen.



461. Aufgabe. Mit einer gegebenen Ellipse eine andere parallel zu ziehen.

Es sey die Entfernung der parallelen Ellipse A B, so trage man diese Länge nach C D, und O D aus A nach F und G, welches die beyden Brennpunkte für die parallele Ellipse gibt, aus denen sie kann gezogen werden.

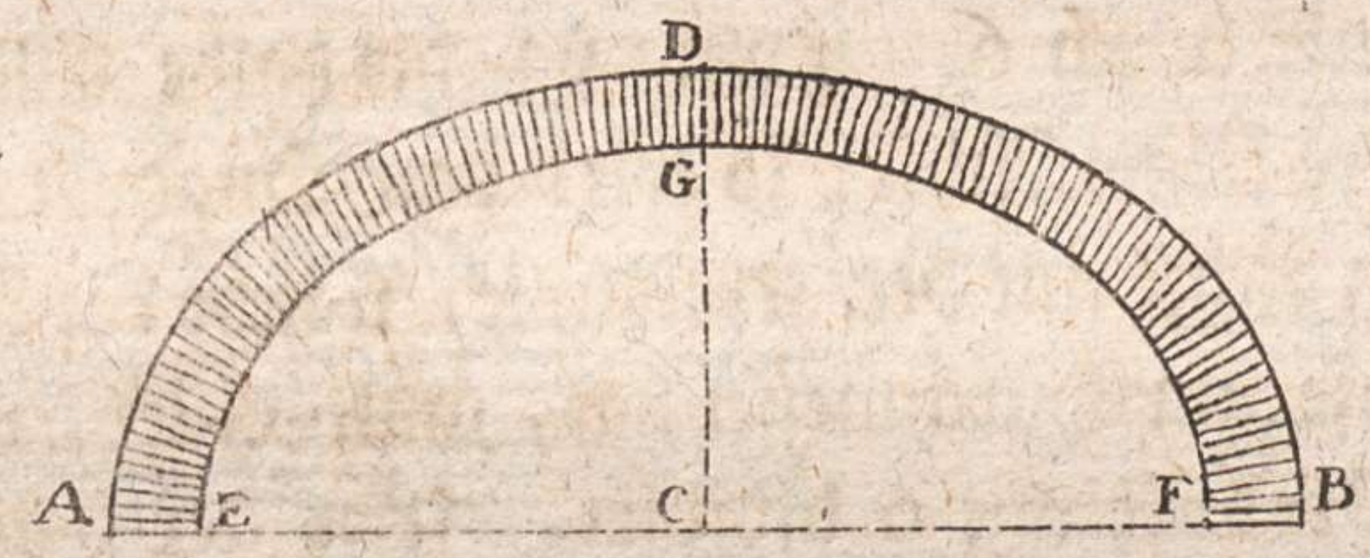


462. Aufgabe. Eine Ellipse in einen Kreis zu verwandeln.

Man setze die halbe kleinere Achse C O an die halbe größere A O; theile bey M die ganze Länge in zwey gleiche Theile; so gibt A M den Halbmesser eines Kreises, welcher der Ellipse dem Flächeninhalte nach gleich seyn wird.

463. **Aufgabe. Den Quadratinhalt einer elliptischen Fläche zu finden.**

Man verwandle die elliptische Fläche in eine Kreisfläche, und berechne sie als eine solche; oder multiplizire die Kreislinie, welche mit der großen Achse gemacht werden kann, mit dem vierten Theile der kleinen Achse. Läßt sich diese nicht bequem in vier gleiche Theile zertheilen, so kann mit der ganzen Achse multiplizirt, und das Produkt durch 4 dividirt werden.



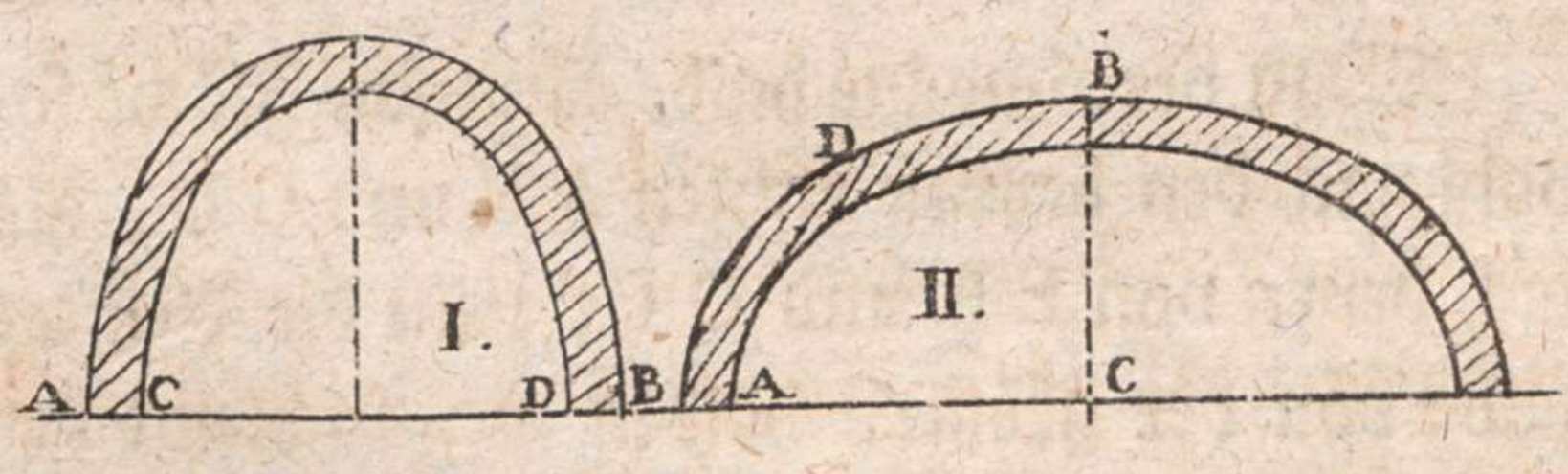
464. **Aufgabe. Den Kubikinhalt eines elliptischen Tonnen-Gewölbes zu finden.**

Man berechne die halbe elliptische Fläche sowohl nach den beyden Achsen A B und C D, als nach denen von E F und G C; ziehe die kleinere halbe von der größern halben ab; so bleibt der Rest für den Bogen A D B F G E, der mit der Länge des Gewölbes multiplizirt, den kubischen Inhalt desselben gibt. Das nähmliche Verfahren kann auch außer dem Nro. 385. angezeigten bey einem kreisförmigen Tonnengewölbe angewandt werden.

465. **Erklärung.** Wenn sich eine halbe Ellipse um eine ihrer beyden Achsen dreht, so beschreibt sie einen Körper, den man eine Ellipsoide nennt.

466. **Aufgabe.** Den kubischen Inhalt einer Ellipsoide zu berechnen, welche entsteht, wenn sich die halbe Ellipse um ihre große Achse wendet.

Man multiplizire die Kreislinie, welche die große Achse zum Durchmesser hat, mit dem Quadrate der kleinern Achse, und dividire das Produkt durch 6. Dreht sich die halbe Ellipse um ihre kleine Achse, so wird das Quadrat der großen Achse mit der Kreislinie, welche die kleine Achse zum Durchmesser hat, multiplizirt, und das Produkt mit 6 dividirt. Bey der halben Ellipsoide kann das Produkt mit 12 dividirt werden.



467. **Aufgabe.** Den kubischen Inhalt eines elliptischen Kuppelgewölbes zu finden. Fig. I.

Man betrachte die Kuppel als zwey volle halbe Ellipsoiden nach den beyden Achsen A B und

C D; suche von beyden den kubischen Inhalt, und ziehe den kleinern von dem größern ab: so bleibt der Rest für den Inhalt der Kuppel.

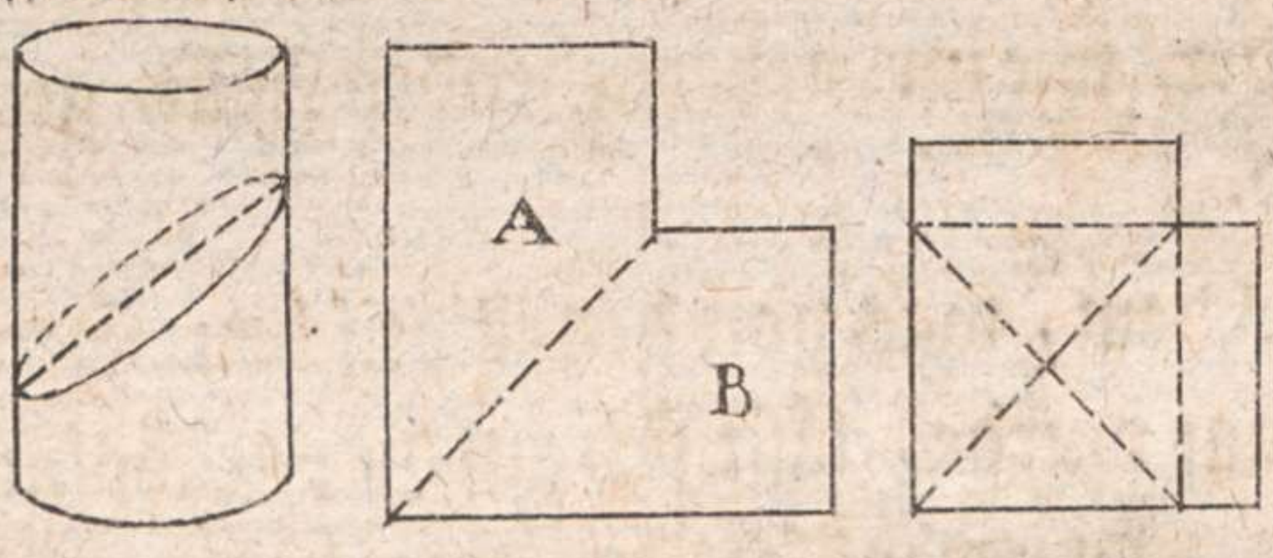
Dreht sich der elliptische Bogen Fig. II. A D B um die kleinere halbe Achse C B, so entsteht ein gedrucktes elliptisches Kuppelgewölb, das eine Kreisfläche zur Grundfläche hat, und als eine halbe Ellipsoide der zweyten oben beschriebenen Art betrachtet werden kann, wovon der kubische Inhalt wieder, wie im vorhergehenden Falle, gefunden wird.

Aus dem, was von den elliptischen Gewölbern gesagt wurde, läßt sich auf die parabolischen schließen. Hyperbolische von einer beträchtlichen Größe kommen fast nie vor.

468. **Anmerkung.** Weil die gedruckten Bögen aus Kreisstücken nicht sehr von der Ellipse unterschieden sind; so kann man dergleichen Gewölbe als elliptisch berechnen, indem dadurch kein großer Unterschied in Hinsicht des Materials hervor geht.

469. **Anmerkung.** Die Strahlen eines Lichtes, das in einem Brennpunkte der Ellipse steht, werden alle in den andern Brennpunkt zurück geworfen. Eben so werden sich auch zwey Menschen, die sich in den beyden Brennpunkten eines elliptischen Zimmers befinden, deutlich einander verstehen, ob sie schon von den übrigen,

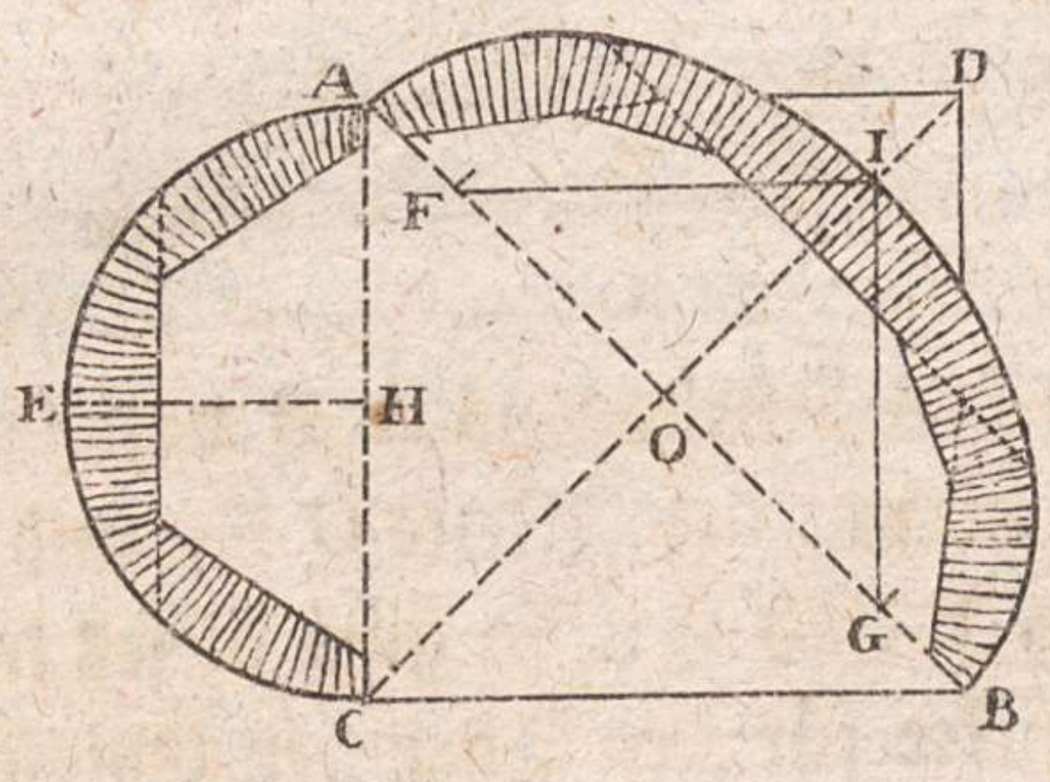
in dem Zimmer befindlichen Personen, nicht wohl können verstanden werden. Man bedient sich der Ellipse auch bey Sprachröhren, wo in dem einen Brennpunkte gesprochen wird, während der andere zugleich den Brennpunkt der Parabel bildet, die dann die Strahlen der Stimme in die Ferne verbreitet. In der Baukunst kömmt sie bey Gewölbern häufig vor, wie wir gleich unten sehen werden.



470. **Erklärung.** Schneidet man eine **Walze** quer über ihre Achse, so gibt der Schnitt ebenfalls eine Ellipse, wie der Querschnitt eines Kegels. Betrachtet man ein Tonnengewölb als eine halbe Walze, so geben die Quer- oder Kreuzschnitte eine halbe Ellipse. Zwey unter was immer für einem Winkel zusammenstossende gleiche Tonnengewölber A und B von gleich hohen Wiederlagen bilden also bey ihrem Zusammenstossungs-Punkte eine halbe Ellipse; weil die sich gleich begegnenden Punkte alle in eine Ebene fallen.

Denkt man sich die Kreuzgewölber als aus vier Stücken von über das Kreuz geschnittenen

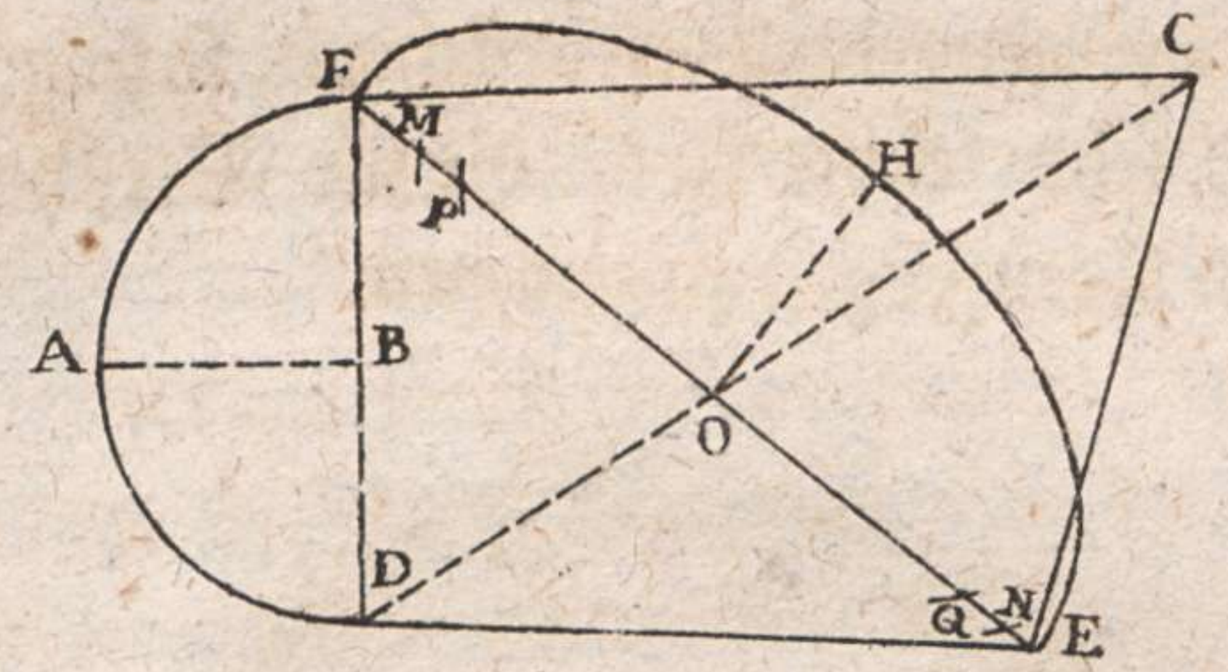
gleichen Tonnengewölbern bestehend; so folgt hieraus eine sehr leichte Art, die zur Verschallung nöthigen Kreuzbögen zu zeichnen.



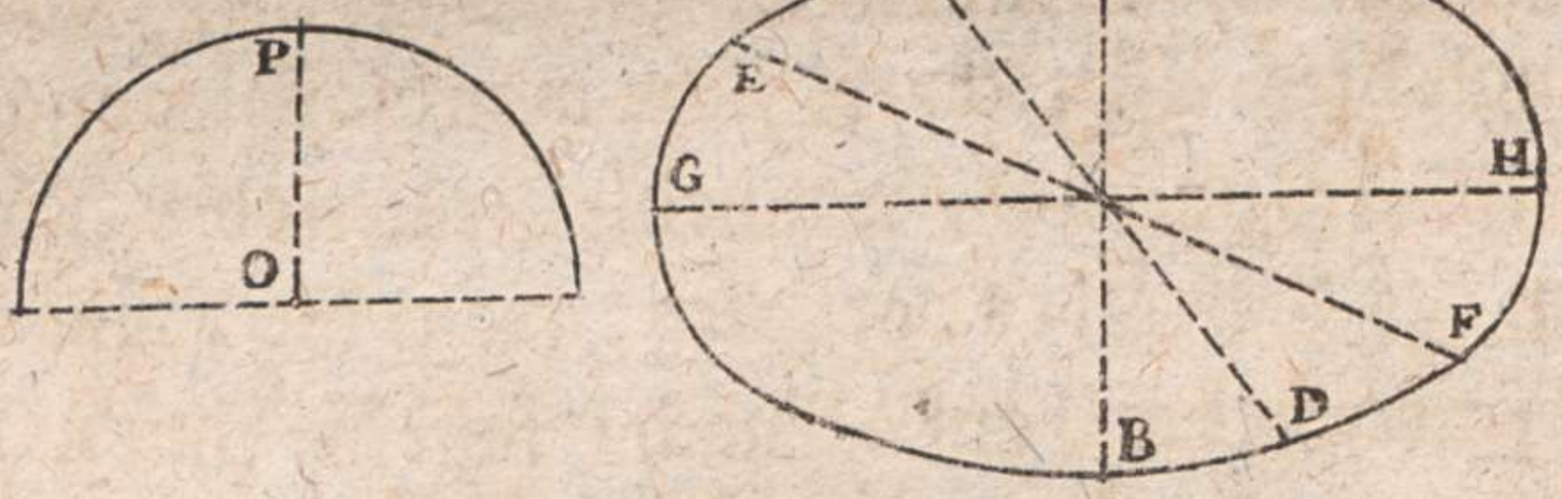
471. **Aufgabe. Wenn der Hauptlehrbogen A E C ein halber Kreisbogen ist, die zu einem Kreuzgewölbe nöthigen Kreuz-Bögen zu zeichnen.**

Ist die Grundfläche ein Quadrat, oder länglichtes Viereck, so ziehe man die Diagonallinien A B und C D, welche die Gräten oder Rippen des Gewölbes vorstellen; trage die Höhe E H senkrecht bey O auf AB nach I; fasse die Linie AO, und trage sie aus I in F und G: so sind dieses die beyden Brennpunkte, auf welchen man die Stifte befestigen, und die halbe Ellipse, wie oben gezeigt wurde, verfertigen kann. Das nähmliche Verfahren gilt auch für die Linie C D.

Ist die Grundfläche ein Trapez oder Trapezoid, so zieht man die Linie C D und E F; trägt



die Höhe des Lehrbogens A B von O senkrecht nach H; nimmt die Weite O E, und trägt sie aus H in P und Q: so gibt dieses die beyden Brennpunkte für den Theil der Ellipse auf der Linie O E. Nimmt man ferners O F, und trägt sie aus H in M, und N auf die Linie E F: so hat man die Brennpunkte für den Theil der Linie O F. Das nähmliche Verfahren gilt auch für die Linie C D.



Ist die Grundfläche eine Ellipse, oder eine aus Kreisstücken zusammen gesetzte Linie, und der Lehrbogen auf der kleinen Achse A B ein halber Kreisbogen; so sind die sämmtlichen Bögen, über welche das Gewölb gemauert werden soll, ebenfalls Ellipsen, die sich aber nach den verschiedenen Längen ihrer Grundlinien richten, welche durch die Querlinien C D, E F, G H ꝛc.

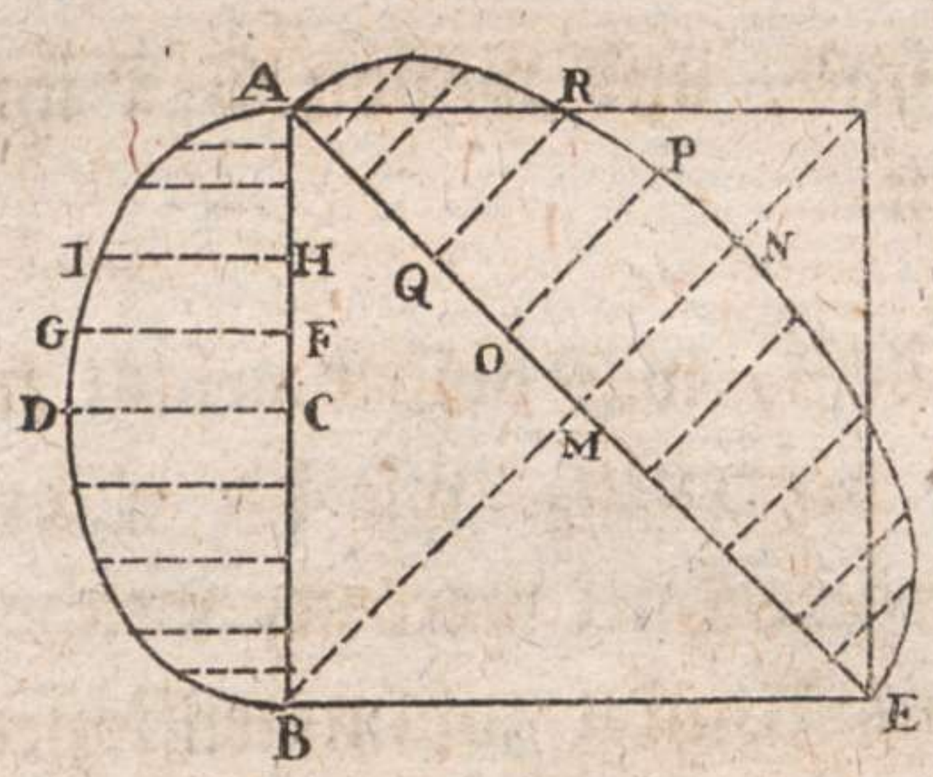
angezeigt sind, und wovon O P ihre allgemeine Höhe ist.

Aus dem, was bisher gesagt wurde, läßt sich leicht begreifen, wie die elliptischen Bögen müssen gezeichnet werden, welche bey zweyen unter einem Winkel zusammenstossenden gleich großen Tonnengewölbern entstehen.

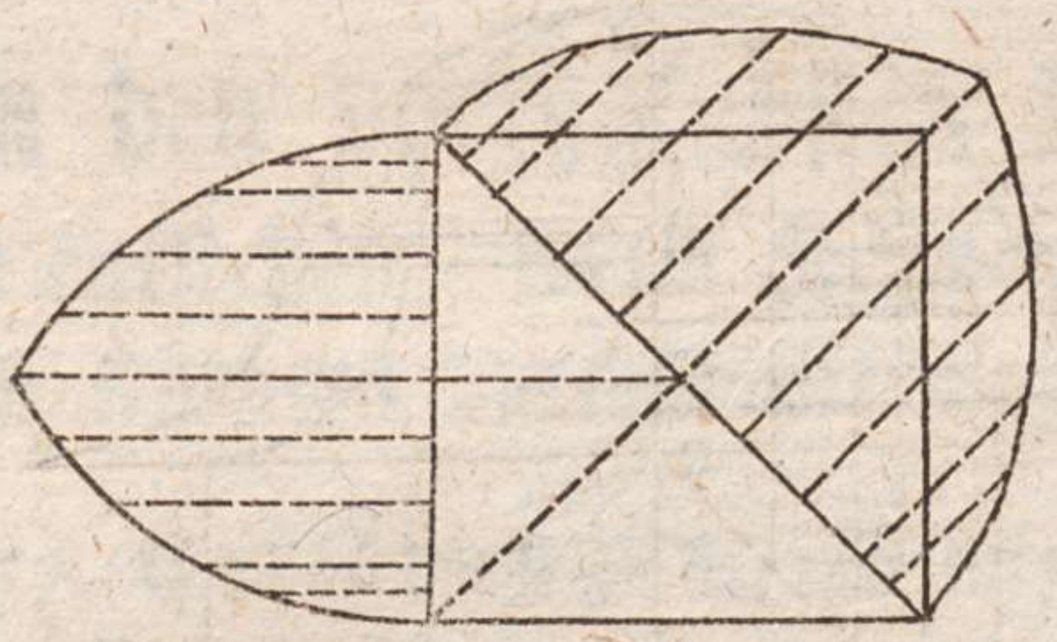
472. **Erklärung.** Ein Zylindroid ist ein walzenartiger Körper, welcher eine Ellipse zur Grundfläche hat. Wird ein Zylindroid quer über seine Achse geschnitten, so gibt der Schnitt ebenfalls eine Ellipse. Ist also der Lehrbogen zweyer unter einem Winkel zusammen stossender gleich großer Tonnengewölber, oder der Lehrbogen eines Kreuzgewölbes eine Ellipse; so sind die Kreuzbögen ebenfalls Ellipsen, und ihre Zeichnung ist von der obigen nicht unterschieden.

Außer dem bisherigen Verfahren gibt es noch ein anderes, welches wir hier beyfügen wollen, weil es in manchen Fällen gute Dienste leistet.

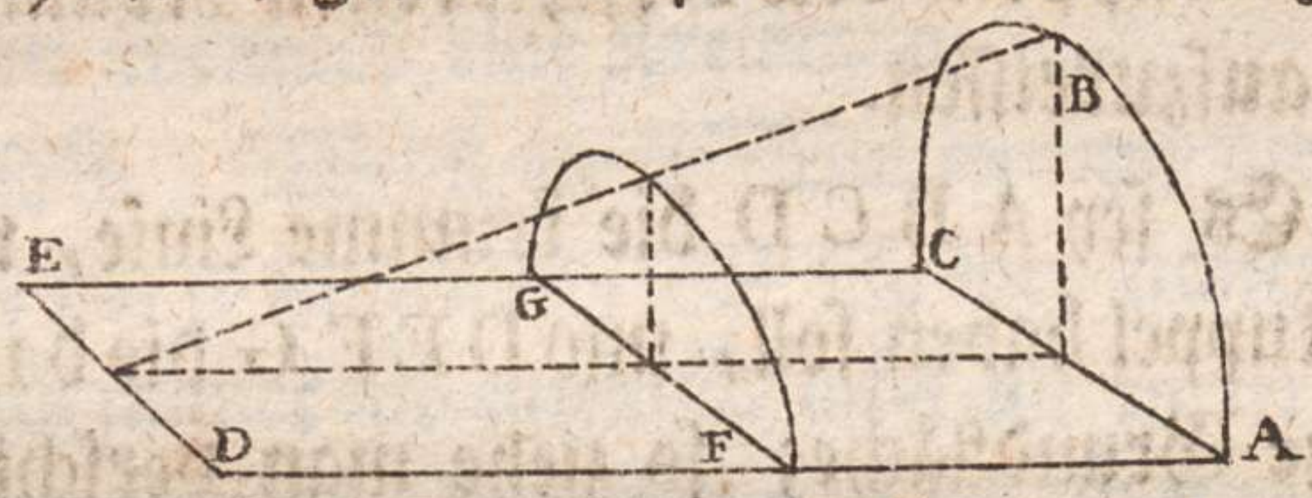
473. **Aufgabe.** Die Kreuzbögen durch eine Abscissenlinie, und die darauf gesetzten rechtwinklichten Ordinaten zu zeichnen.



Man theile die Linie A C in mehrere Theile hier in 5, den letzten Theil aber noch in zwey andere, um die Beugung desto genauer zu bekommen, und ziehe die Senkrechten C D, F G, H I ꝛc. Theile auch die Diagonallinie A E in eben so viele gleiche Theile, als A B, und errichte die Senkrechten M N, O P, Q R ꝛc. unbestimmt; trage dann die Senkrechten der Linie A B, nähmlich C D nach M N; F G nach O P; H I nach Q R u. s. w. wodurch man die einzelnen Punkte des Gradbogens erhält, die entweder aus freyer Hand, oder durch eingeschlagene Stifte, und ein biegsames Lineal zusammen gezogen werden. Je mehr man Punkte aufträgt, desto genauer wird die krumme Linie. Daß dieses Verfahren auch bey Grundflächen von Trapezen und Trapezoiden statt finden kann, folgt von sich selbst. Es muß aber vorzüglich da angewandt werden, wo der Lehrbogen weder ein halber Kreisbogen, noch eine halbe Ellipse, sondern eine andere von den oben beschriebenen krummen Linien oder gedruckten Bögen ist.

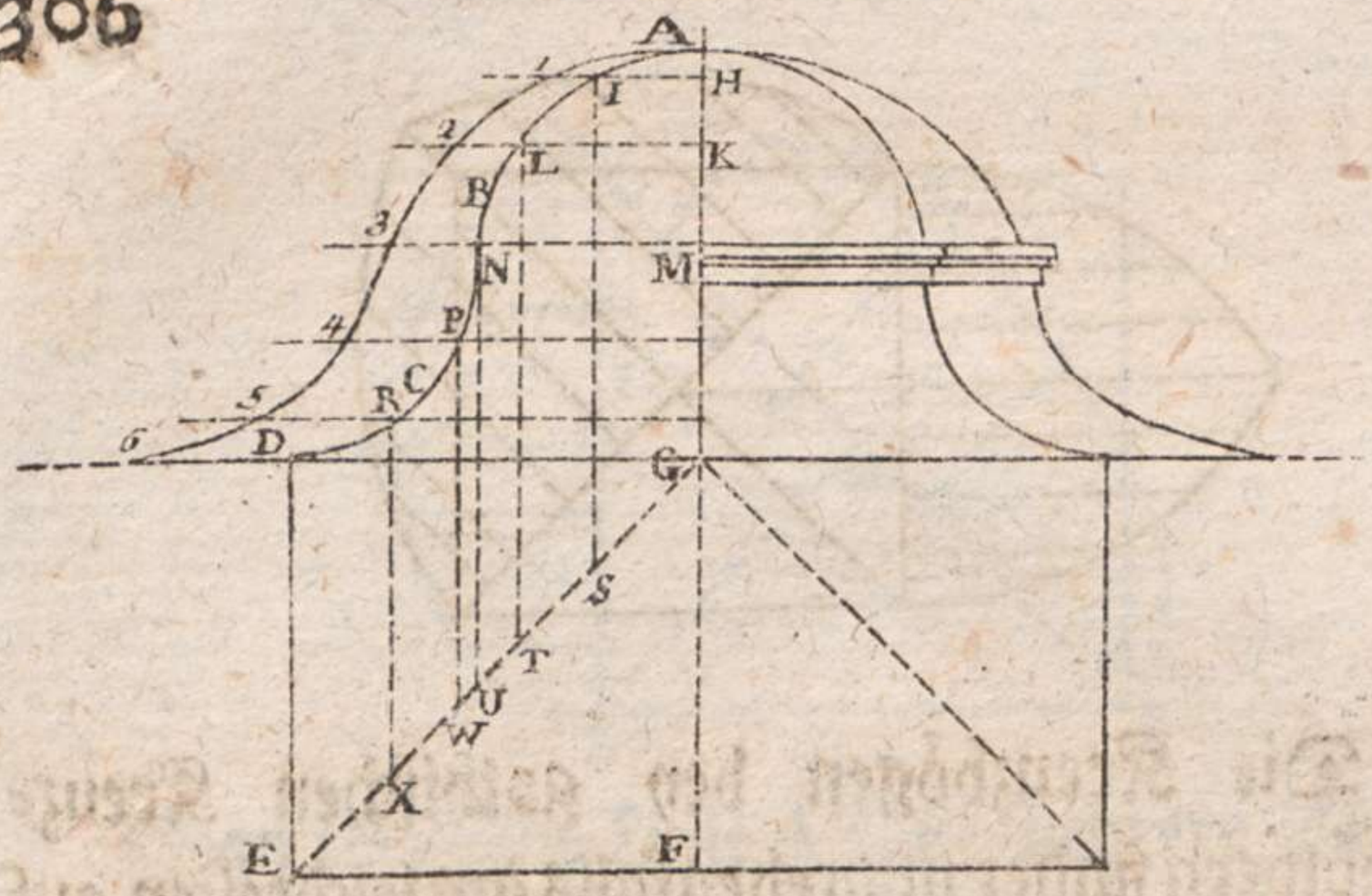


Die Kreuzbögen bey gothischen Kreuz-Gewölbern findet man ebenfalls am leichtesten auf diese Art, wie sich aus der Figur ersehen läßt, die nach den obigen keiner ferneren Erklärung bedarf.



474. Anmerkung. Wenn ein Tonnengewölbe A B C sich in eine gerade Linie D E endet, so sind die Schalbögen, wie F G, welche parallel mit A C gesetzt werden, Ellipsen, die immer niederer werden, je mehr sie sich der Linie D E nähern.

475. Anmerkung. Weil man die Gradlinien von Thurmkuppeln betrachten kann, als wenn ein nach verschiedenen Krümmungen zusammengesetzter Körper mit einer Fläche durchschnitten wäre, wovon der Schnitt die Gradlinie bilden würde: so können auch diese auf eine nicht viel unähnliche Art gefunden werden.



476. **Aufgabe. Die Gradlinien der Thurmkuppeln von verschiedenen Krümmungen aufzureissen.**

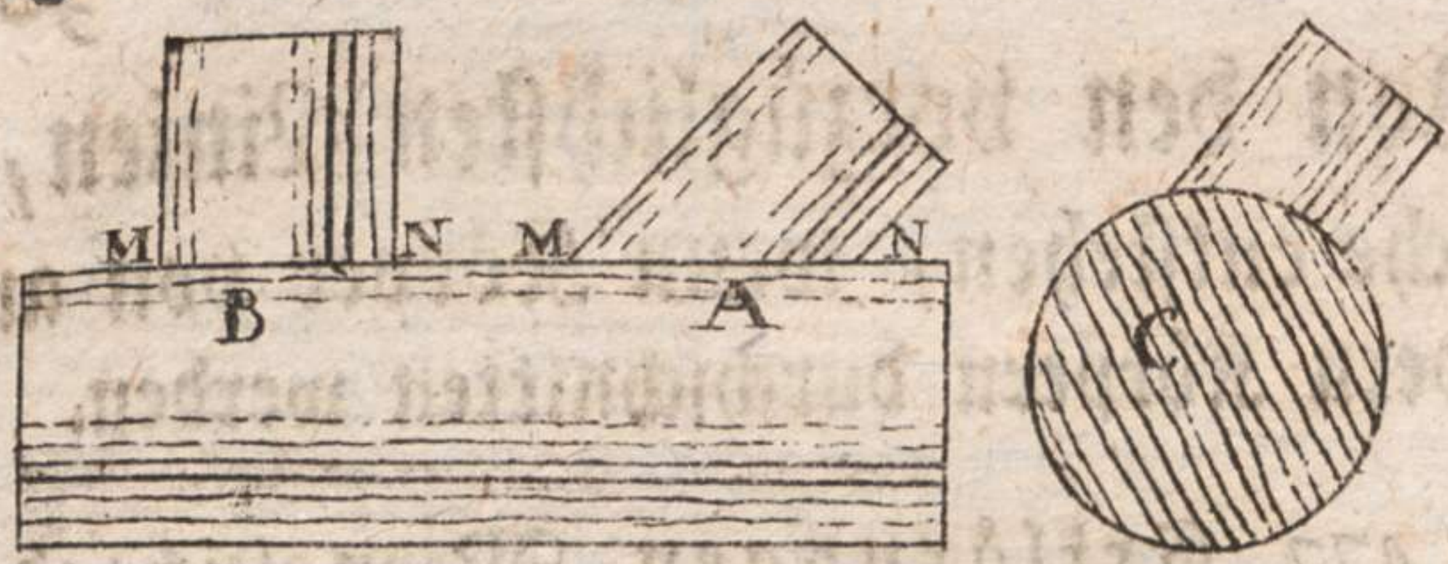
Es sey A B C D die krumme Linie, welche die Kuppel haben soll, und D E F G die dazu gehörige Grundfläche; so ziehe man verschiedene Parallellen H I, K L, M N ꝛc. die man unbestimmt verlängert. Aus I, L, N, P und R lasse man Senkrechte auf die Grundlinie D G, herunter, die bis an die Diagonallinie E G über welche die Gradlinie zu stehen kömmt, verlängert werden. Man nehme dann auf dieser Linie die Länge G S, und trage sie von H nach 1; dann G T von K nach 2; G U von M nach 3, u. s. w. so geben die Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6, wenn sie zusammen gezogen werden, die verlangte Gradlinie.

Von den vorzüglichsten Linien, welche entstehen, wenn Körper von andern Körpern durchschnitten werden.

477. **Erklärungen.** Wenn gleiche oder ungleiche Kugeln sich einander durchschneiden, so gibt der Schnitt alle Mahl eine Kreislinie. Wird eine Kugel von einem Kegel, oder einer senkrechten Walze so durchschnitten, daß ihre Achsen durch den Mittelpunkt der Kugel gehen; so gibt der Schnitt ebenfalls eine Kreislinie.

478. Wenn zwey Walzen von gleicher Größe sich so schneiden, daß sich ihre Achsen unter was immer für einem Winkel antreffen, und ihre gebogenen Oberflächen nicht über einander hervorstehen, so gibt der Schnitt eine Ellipse. Das Nähmliche gilt auch, wenn zwey gleichgroße Zylindroiden einander durchschneiden; denn es ist eben so viel, als wenn sie von einer Fläche unter gleichen Winkeln durchschnitten, und zusammen gesetzt würden, daher diese beyden letzten Fälle bereits oben Nro. 470. u. 472 angezeigt wurden. Sind die Bögen der durchschneidenden Zylindroiden überhoben, so kann der Durchschnitt auch zum Kreise werden.

479. Wenn zwey Walzen von ungleichen Durchmessern sich so einander schneiden, daß sich ihre Achsen unter einem rechten Winkel begegnen;



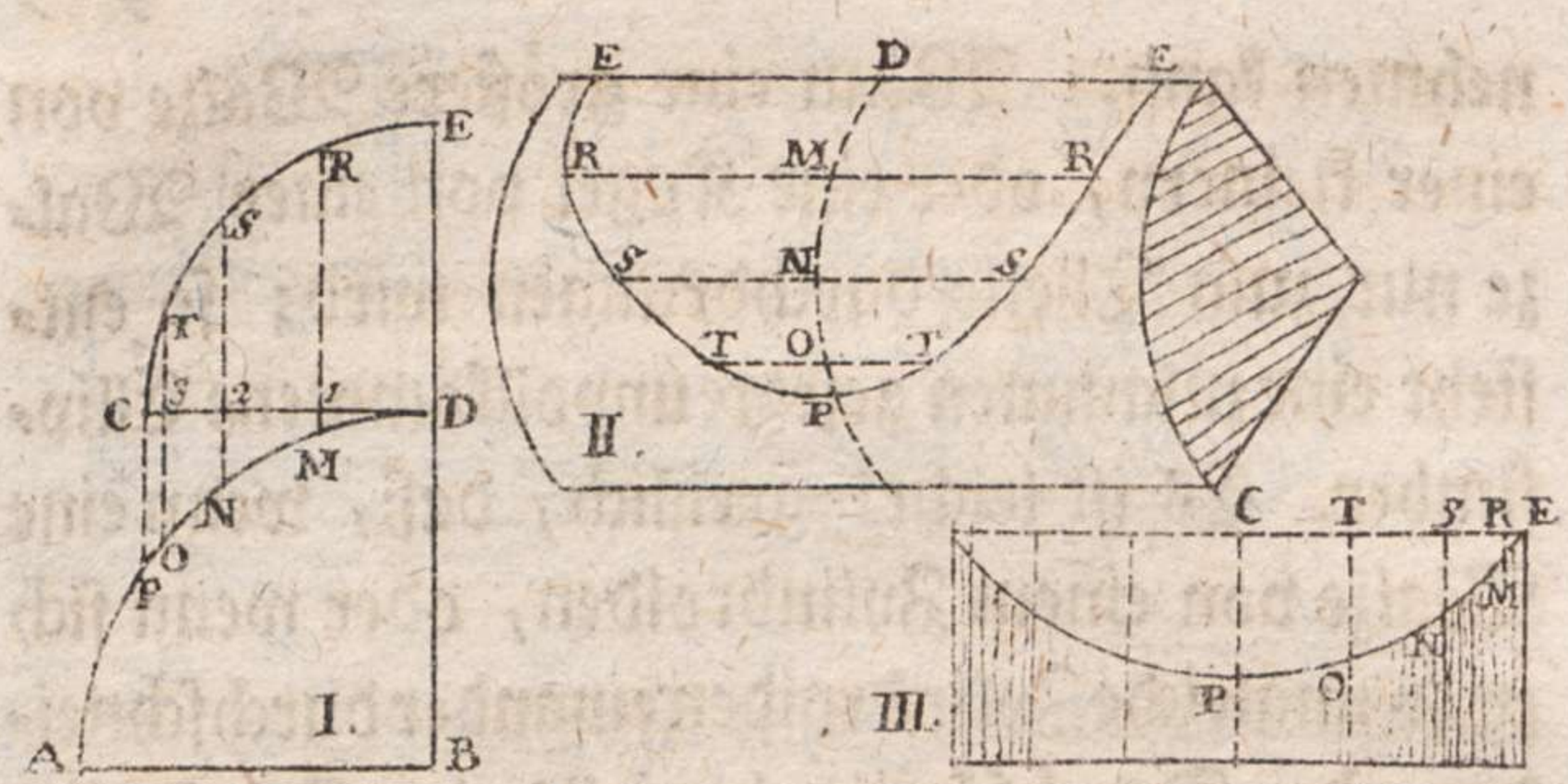
so ist der Durchschnitt eine Zykloimber; begegnen sich aber die Achsen unter einem spitzigen oder stumpfen Winkel, so entsteht eine Ellipsimber. Ueberhaupts erhält man alle Mahl eine Zykloimber, wenn die erzeugende oder durchschneidende Linie ein Kreis, und eine Ellipsimber, wenn die durchschneidende Linie eine Ellipse ist. Um dieses zu erkennen, darf man nur bedenken, ob der Durchmesser der durchschneidenden Walze, wenn er mit beyden Enden M und N an der Walze liegt, sich verlängert oder nicht; wo denn im ersten Falle eine Ellipsimber, wie bey A; im zweyten aber eine Zykloimber, wie bey B, entsteht. Treffen sich die beyden Achsen der durchschneidenden Körper nicht einander an, sondern liegen über oder unter einander, wie bey C; so ist aus der obigen Ursache der Durchschnitt ebenfalls ein e Ellipsimber.

480. Wird eine Kugel von einer Walze so geschnitten, daß die Achse der Walze nicht durch den Mittelpunkt der Kugel geht; so gibt der Durchschnitt ebenfalls eine Ellipsimber, wie man aus dem, was oben gesagt wurde, leicht ab-

nehmen kann. Wenn eine größere Walze von einer kleinern, oder eine Kugel von einer Walze nur zum Theile durchdrungen wird; so entsteht eine zusammen gesetzte unvollkommene Ellipsimber. Es ist leicht begreiflich, daß, wenn eine Walze von einem Zylindroiden, oder wenn sich zwey ungleiche Zylindroiden einander durchschneiden, der Durchschnitt ebenfalls eine Ellipsimber seyn müsse.

Weil die Durchschnitte von Kegeln, Parabeln und Hyperbeln sehr selten vorkommen, so wollen wir hier bloß die Zeichnung der Zykloimber und Ellipsimber betrachten, welche entstehet, wenn Walzen einander durchschneiden, oder Kugeln von Walzen durchschnitten werden. Diese Linien von einer doppelten Krümmung lassen sich nicht, wie die Ellipse, auf einer Fläche, sondern nur auf den Körpern, auf welchen sie entstehen, aufreissen. Man kann zwar die einzelnen Punkte auf eine Fläche bringen; sie bilden aber die eigentliche krumme Linie erst dann, wenn diese Fläche über den dazu gehörigen Körper gebogen, und die Linie darnach aufgerissen wird.

481. Aufgabe. **Die Zykloimber zu zeichnen, welche entsteht, wenn die beyden Achsen zweyer ungleicher Walzen sich senkrecht durchschneiden.**

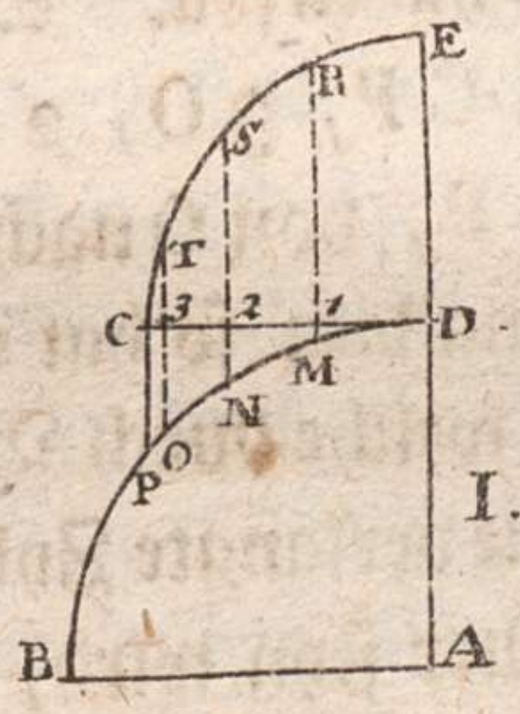


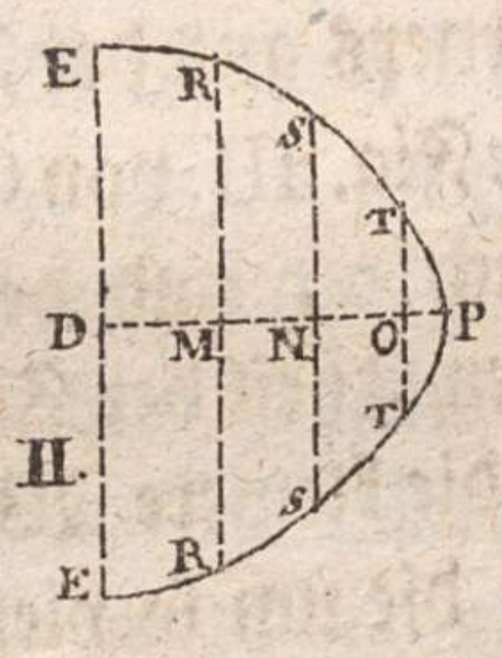
Es seye der Halbmesser der grösern Walze A B, Fig. I. der kleinern C D; so setze man sie parallel über einander, wie die Figur zeigt; beschreibe die Bögen A D und C E; theile den kleinen Bogen C E in mehrere gleiche Theile T, S, R, E, und ziehe parallel mit E D die Linien R M, S N, T O, C P; so hat man die Vorbereitungs-Figur, aus welcher das Nöthige sowohl für die grösere, als kleinere Walze kann genommen werden.

Um die Zykloimber auf die grösere Walze zu bringen, mache man auf dieselbe einen Bogen D P Fig II, welcher die Länge von D P Fig. I. haben muß; trage D M nach D M, N M nach N M, und O P nach O P in die Fig. II. und ziehe durch diese Punkte die Parallellen E E, R R, S S, T T; trage ferners aus Fig. I. D E nach D E in die Figur II. 1 R von M in R R; 2 S von N in S S, und 3 T von O in T T: so hat man auf der Walze die Punkte einer halben Zykloimber, welche aus freyer Hand zusammenge-

zogen, und auf der entgegengesetzten Seite wiederholt werden kann.

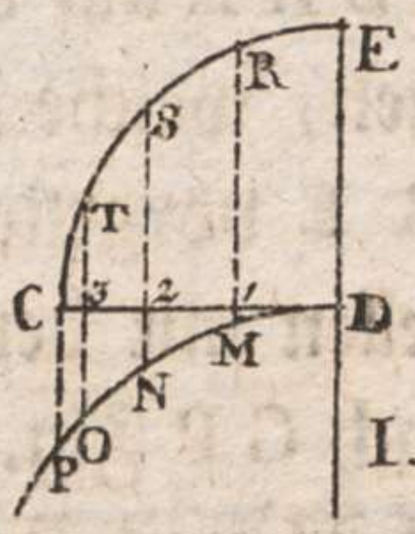
Auf der kleinern Walze Fig. III. werden aus Fig. I. die Bögen C T S R E auf den Umkreis der Grundfläche getragen, welche Fig. III. durch die Punkte C T S R E vorgestellt sind. Auf diese zieht man Parallellen mit der Achse, und trägt C P aus Fig. I. nach C P Fig. III. 3 O nach T O; 2 N nach S N; 1 M nach R M, wo sie die Punkte der Zykloimber auf einem Viertheile der kleinern Walze geben, die auf den übrigen Theilen des Umkreises wiederholt werden.

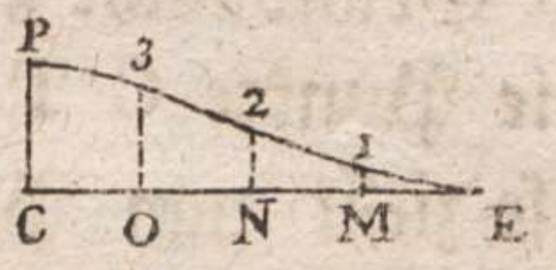




Will man lieber durch Ueberbiegen eines steifen Papiers die Zykloimber auf die beyden Walzen bringen, so mache man wieder eine Linie D P Fig. II., von der Länge des Bogens D P Fig. I. trage die Bögen D M, M N, O P aus der Fig. I. nach D M, M N, N O, und O P in die Figur II.; ziehe die Senkrechten D E E M R R, N S S, und O T T; trage D E aus der Fig. I. nach D E in die Fig. II. 1 R aus M nach R R, 2 S aus N nach S S, 3 T aus O nach T T

so erhält man durch Zusammenziehung der Punkte die Fig. II., welche durch Beugung über die größere Walze die verlangte Zykloimber gibt.



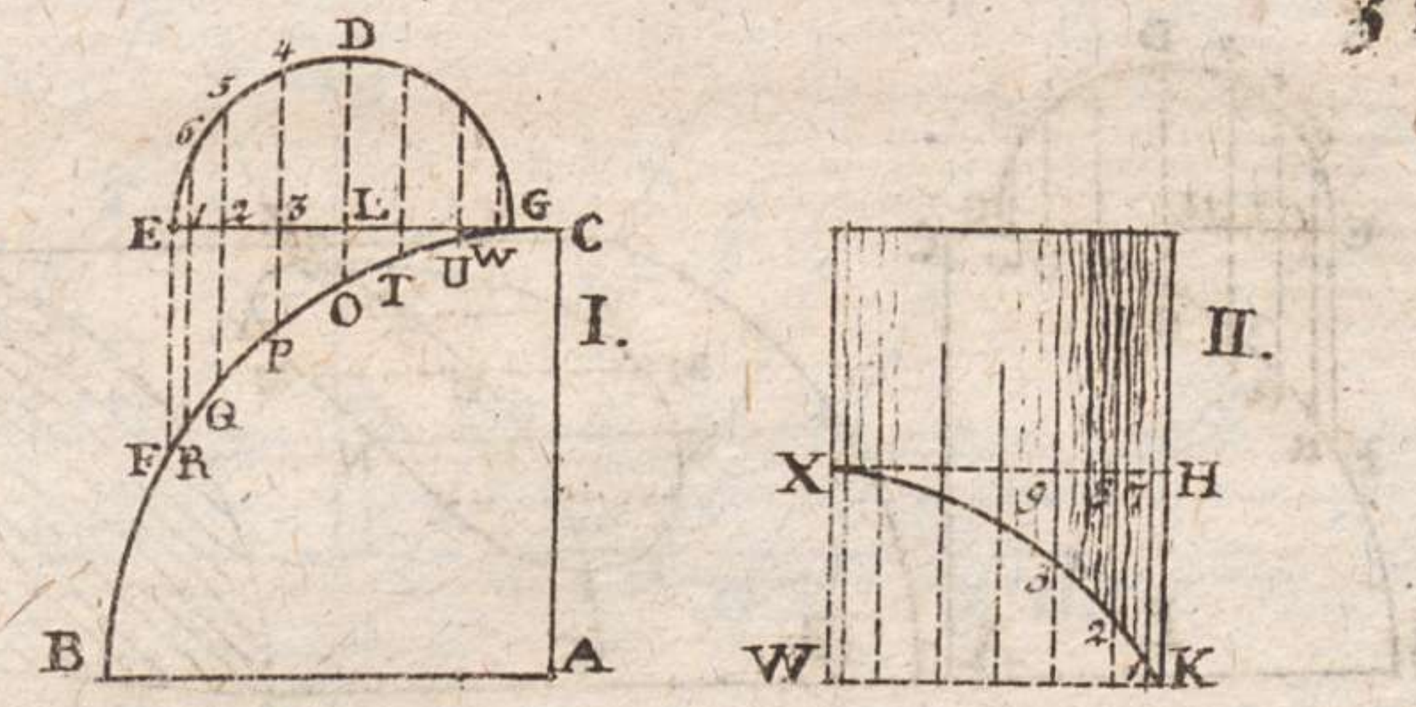


III.

Für die kleinere Walze trage man aus der Vorbereitungs Figur I. die Theile E R S T C in die Fig. III. aus C nach O N M E, wo E C die Länge von dem Bogen E C haben soll. Man trage ferners aus der Fig. I. C P, 3 O, 2 N, 1 M in die Fig. III. von C nach P, von O nach 3, von N nach 2, und von M nach I; so hat man den vierten Theil der Figur, welche durch Beugung über die kleinere Walze die verlangte Zykloimber gibt, die um so viel genauer seyn wird, je mehr man Punkte auf den gegebenen Bogen angenommen hat.

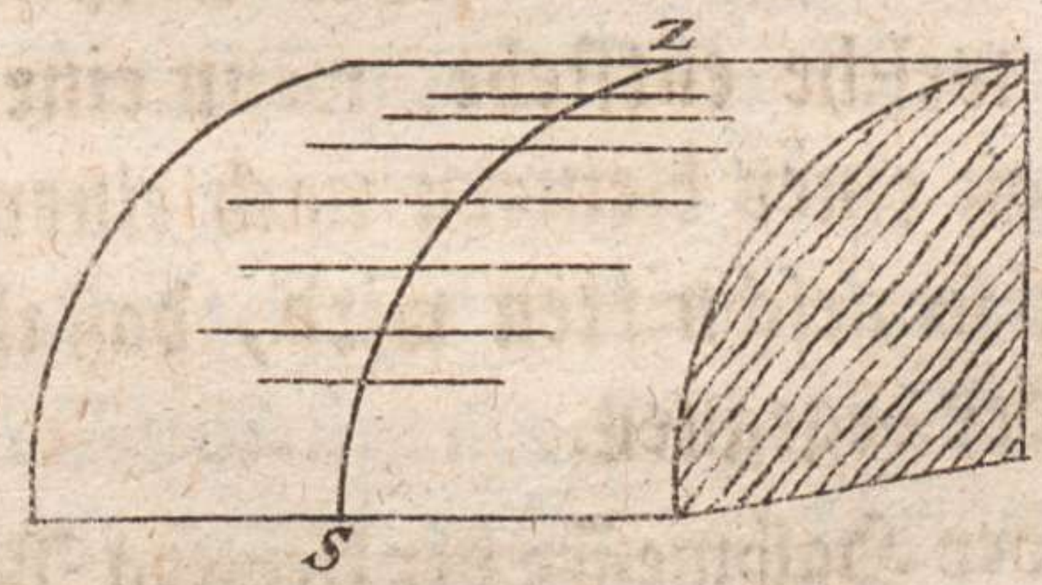
482. **Aufgabe.** **Die Ellipsimber zu beschreiben, welche entsteht, wenn eine größere Walze von einer kleinern in senkrechter Richtung so durchdrungen wird, daß die Achsen einander nicht begegnen.**

Man setze die beyden Grundflächen der Walzen Fig. I. nach der Lage ihrer Durchmesser übereinander; theile den Kreis G D E in gleiche Thei-

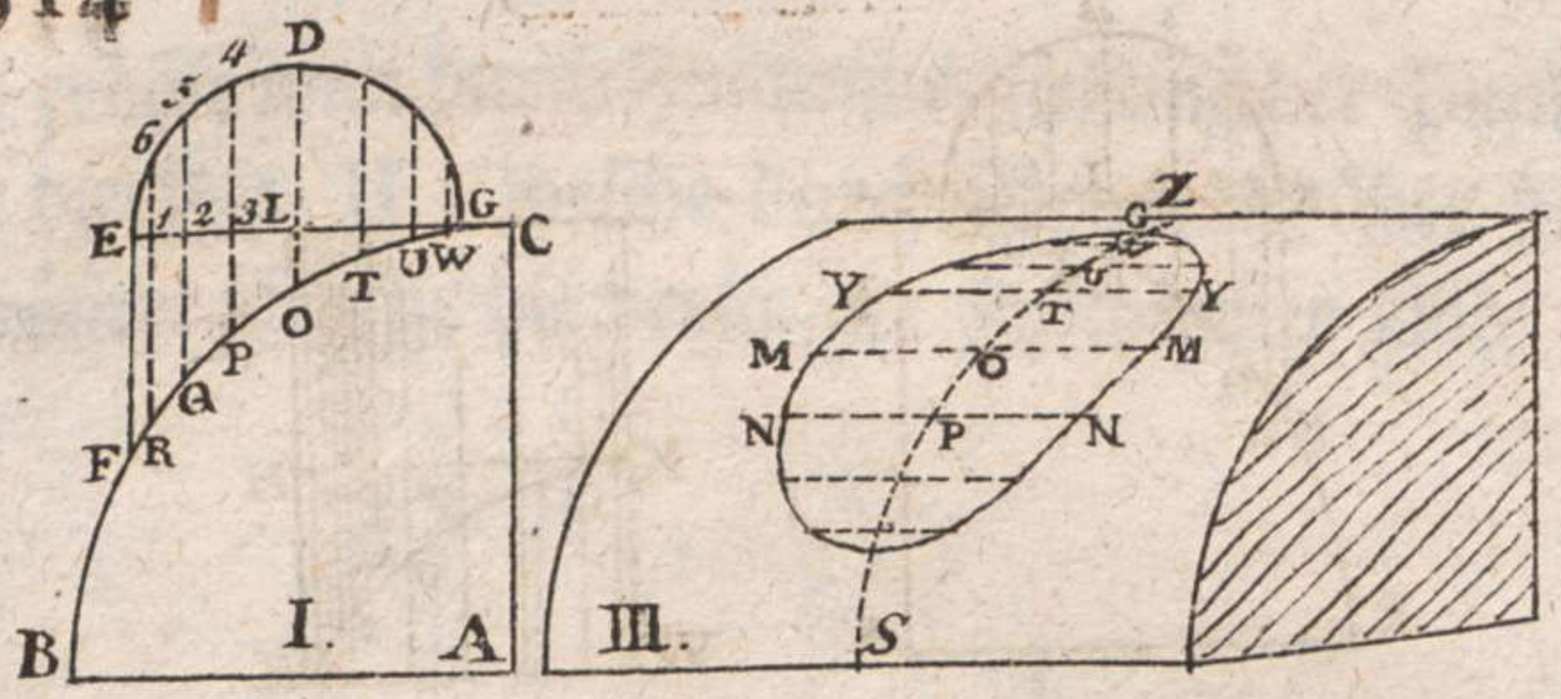


le, und ziehe die Senkrechten D O, 4 P, 5 Q ꝛc. so hat man wieder die Vorbereitungs Figur.

Die Ellipsimber auf der kleinern Walze erhält man, wenn man ihren halben Umkreis an der Grundfläche in eben so viele Theile eintheilt, als G D E; aus diesen Theilen Fig. II. Senkrechte H K, 1 7, 2 8 ꝛc. errichtet, die Länge E F nach H K trägt, und H X parallel mit K W zieht. Auf diese wird 1 R nach 1 7, 2 Q nach 2 8 ꝛc. getragen, und an die dadurch erhaltenen Punkte die krumme Linie K X gezogen, welche die Ellipsimber auf der halben Walze gibt, wozu die andere gleiche Hälfte auf die nähmliche Art gefunden wird.



Auf die größere Walze wird wieder die Kreislinie Z S parallel mit der Grundfläche gezogen, und die Theile C G, G W, W U ꝛc. aus de-

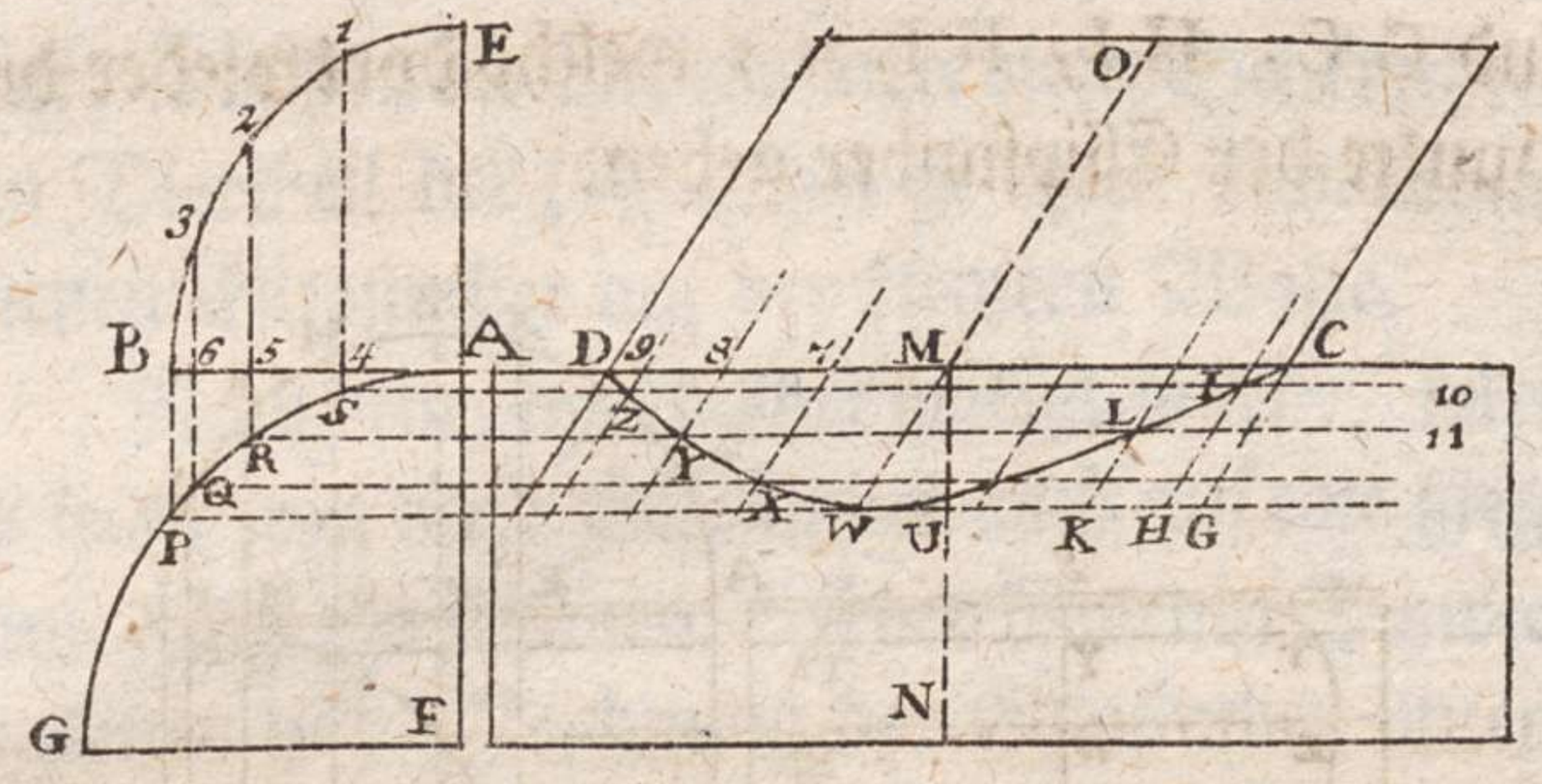


Vorbereitungs-Fig. I. in die Fig. III. von Z nach W, von W nach U, von U nach T ꝛc. getragen. Durch diese Punkte zieht man die Parallellen N N, M M, ꝛc. und trägt aus der Vorbereitungs-Figur die Längen L D, 3 4, 2 5, in die Fig. III., aus O in M M, aus P in N N, und aus T in Y Y ꝛc., wodurch man die einzelnen Punkte der Ellipsimber erhält, die man aus freyer Hand zusammen ziehen kann.

Das Verfahren, die Ellipsimber durch eine gerade biegsame Fläche auf die beyden Walzen zu bringen ist, von dem der Zykloimber nicht unterschieden.

483. **Aufgabe.** Die Ellipsimber zu zeichnen, welche entsteht, wenn eine größere Walze von einer kleinern nach einer schiefen Richtung so geschnitten wird, daß ihre Achsen einander begegnen.

Es sey, der Halbmesser der kleinern Walze A B die schiefe Lage unter dem Winkel O M C; so ist C D die größere Achse, welche durch den schiefen Schnitt entsteht. Man setze M D von A nach E,

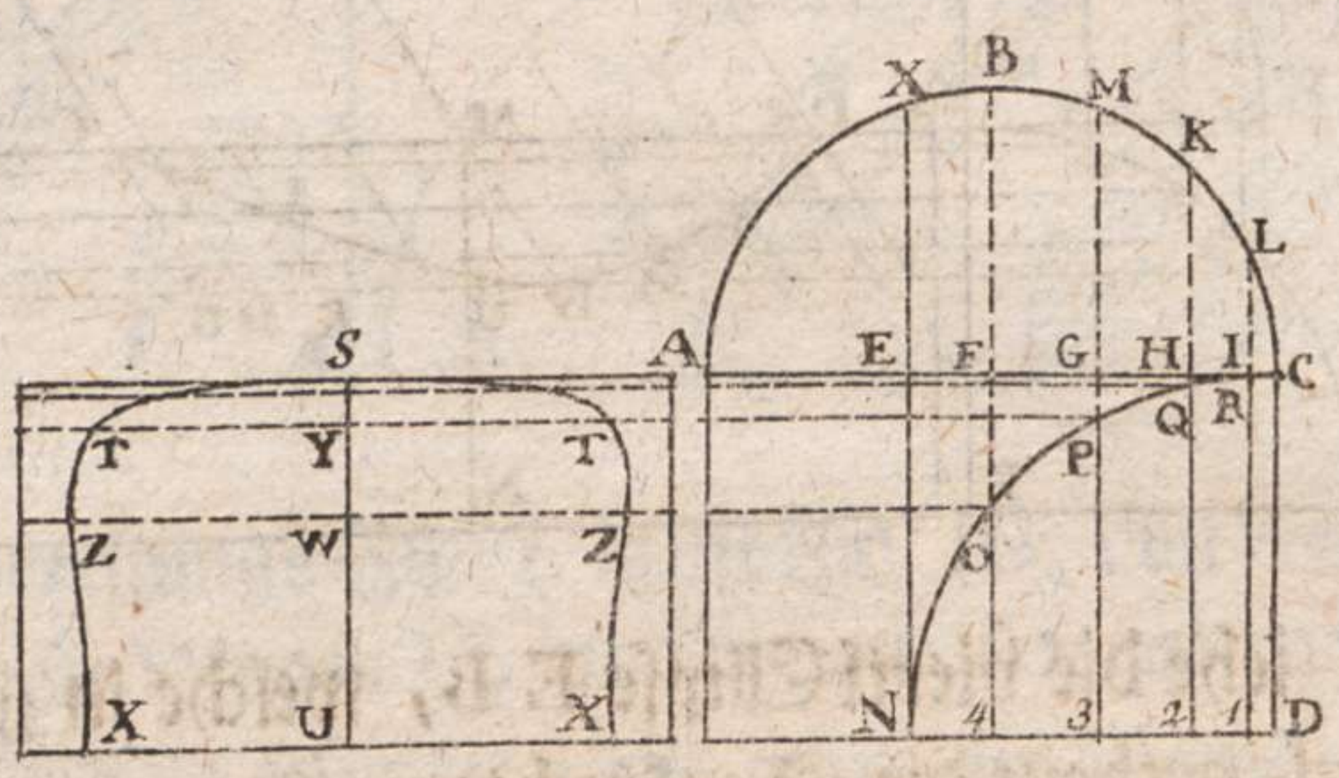


und ziehe die viertl Ellipse E B, welche in gleiche Theile getheilt die Senkrechten 1 S, 2 R, 3 Q, B P gibt. Trägt man nun die Längen A E, 4 1, 5 2, 6 3 von M nach 7, 8, 9, D, und von M die nähmlichen Theile auch gegen C; zieht aus P Q R S Parallellen mit C D; aus 7, 8, 9 aber Parallelen mit O M: so geben die Durchschneidungs-Punkte W, X, Y, Z, D die nöthigen Theile für die Ellipsimber.

Um diese wirklich auf die grösere Walze zu bringen, darf man nur wieder die Linie M U parallel mit der Grundfläche ziehen, und auf diese die Längen A S, S R ꝛc. tragen, auf welche man die Parallellen mit C D, nähmlich Z 10, Y 11, ꝛc. von der nähmlichen Länge setzen kann, wie die Figur zeigt; wo man finden wird, daß von diesen Parallellen nur C D von M N in zwey gleiche Theile getheilt wird; alle übrigen aber in ungleiche Theile zerfallen.

Die Linien, welche von C und D angefangen, auf die kleine Walze getragen werden,

sind G C, H I, K L ꝛc., welche dort wieder die Punkte der Ellipsimber geben.

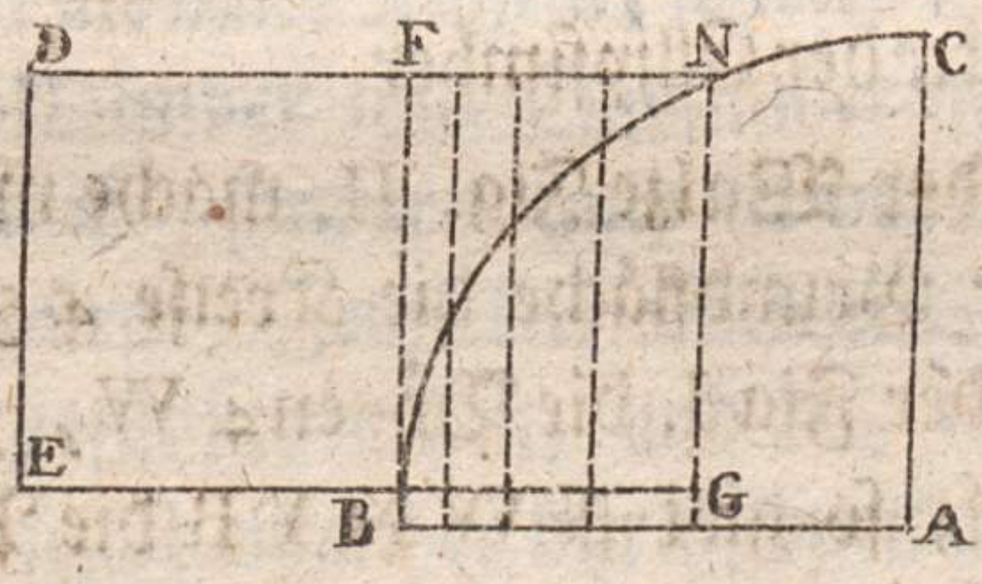


484. **Aufgabe. Die zusammengesetzte unvollkommene Ellipsimber zu zeichnen, welche entsteht, wenn eine größere Walze von einer kleinern nur zum Theile durchdrungen wird.**

Es soll die größere Walze von der kleinern A B C bis an die Linie X N durchdrungen werden, so setze man die Grundflächen wieder übereinander; und ziehe die Parallelen, wie die Figur zeigt. Auf die größere Walze ziehe man die Linie S U, trage die Bögen N O P Q R C darauf, und ziehe die Parallelen N U X, O W Z ꝛc.; setze E X von U nach X X; F B von W nach Z Z, G M von Y nach T T ꝛc.; so hat man die Hälfte der zusammengesetzten unvollkommenen Ellipsimber auf der größern Walze. Auf die kleinere zieht man N D, parallel mit der Grundfläche, welche die Länge von dem Bogen X C haben soll, und trägt die Bögen X B, B M ꝛc. darauf. Werden nun auf diese Punkte die Parallelen nach ihrer Länge 4 O, 3 P, 2 Q ꝛc. senkrecht auf D N ge-

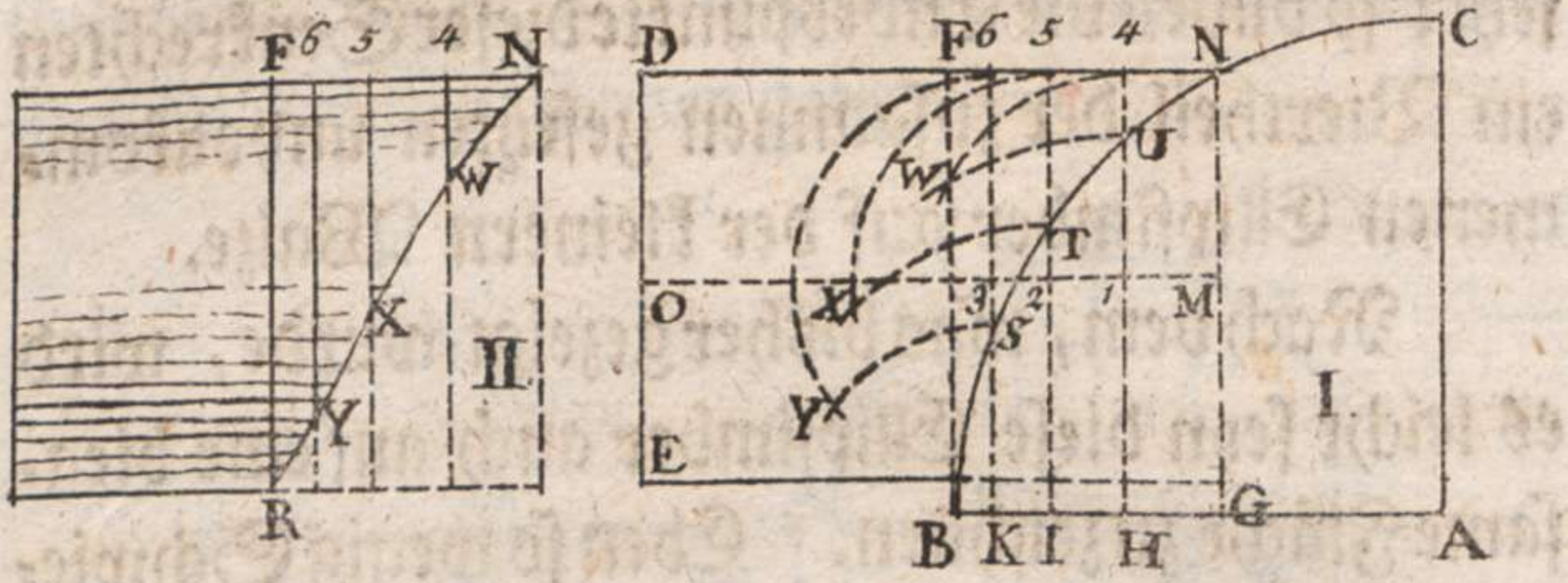
setzt; so bilden die Endespunkte dieser Senkrechten ein Viertheil der zusammen gesetzten unvollkommenen Ellipsimber auf der kleinern Walze.

Nachdem, was bisher gezeigt wurde, wird es leicht seyn diese Ellipsimber auch auf eine biegsame Fläche zu zeichnen. Eben so wenig Schwierigkeiten ist die Zeichnung der Ellipsimber unterworfen, welche entsteht, wenn zwey Zylindroiden einander durchschneiden, oder wenn eine Walze von einem Zylindroiden durchschnitten wird; weil man nur ihre beyderseitigen Grundflächen gehörig übereinander setzen, und auf eine ähnliche Art, wie bisher, verfahren darf.



485. **Aufgabe.** **Die Ellipsimber zu zeichnen, welche entsteht, wenn eine Kugel von einer Walze so durchdrungen wird, daß die Achse der Walze nicht durch den Mittelpunkt der Kugel geht.**

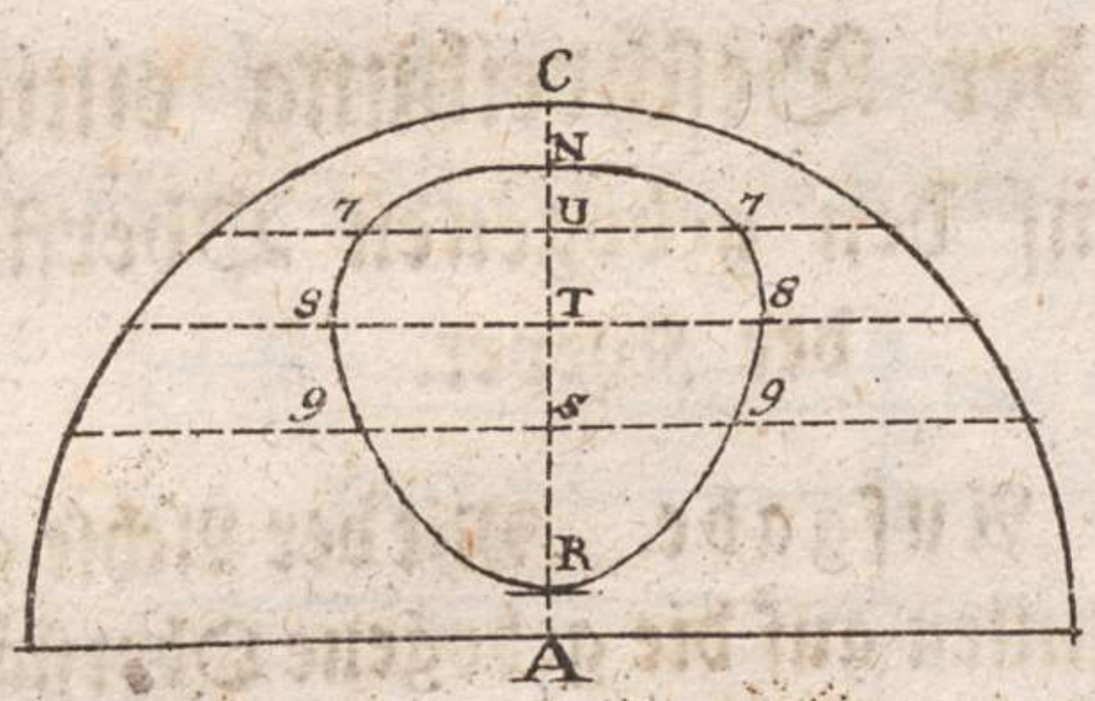
Es sey der Halbmesser der Kugel A B, und der Durchmesser der Walze D E, so dringt die Walze nach der Richtung von D N und E G in die Kugel. Man ziehe also F B und N G parallel mit A C, und theile F N in beliebige Theile,



aus welchen man die Senkrechten 4 H, 5 I ꝛc. auf B G herabläßt, die die Achse O M in 1, 2, 3, und den Halbmesser der Kugel in H I K schneiden. Man setze nun den Zirkel in 1, 2, 3, und mache mit 1 4 die Bögen 4 W, 5 X, 6 Y; diese durchschneide man aus H mit H U, aus I mit I T, und aus K mit K S: so geben W X Y die Hauptpunkte der Ellipsimber.

Auf der Walze Fig. II. mache man parallel mit der Grundfläche die Kreise 4 5 6 F und trage aus der Fig I. die Bögen 4 W, 5 X, und 6 Y darauf; so gibt N W X Y R die Punkte der Ellipsimber. In der Zeichnung wurden die Bögen 4 W, 5 X, 6 Y in senkrechter Richtung in die Fig. II. von 4 nach W ꝛc. getragen; weil sich sonst die Sache nicht wohl deutlich vorstellen läßt.

486. Auf der Kugel ziehe man eine größte Kreislinie A C; bestimme durch den Bogen C N aus der Fig. I. den Punkt N auf der Kugel, und trage die Bögen N U, U T ꝛc. aus der Fig. I. von N nach U, T, S, R, aus welchen die Parallelen Kreise 7 7, 8 8, 9 9, gezogen, und aus

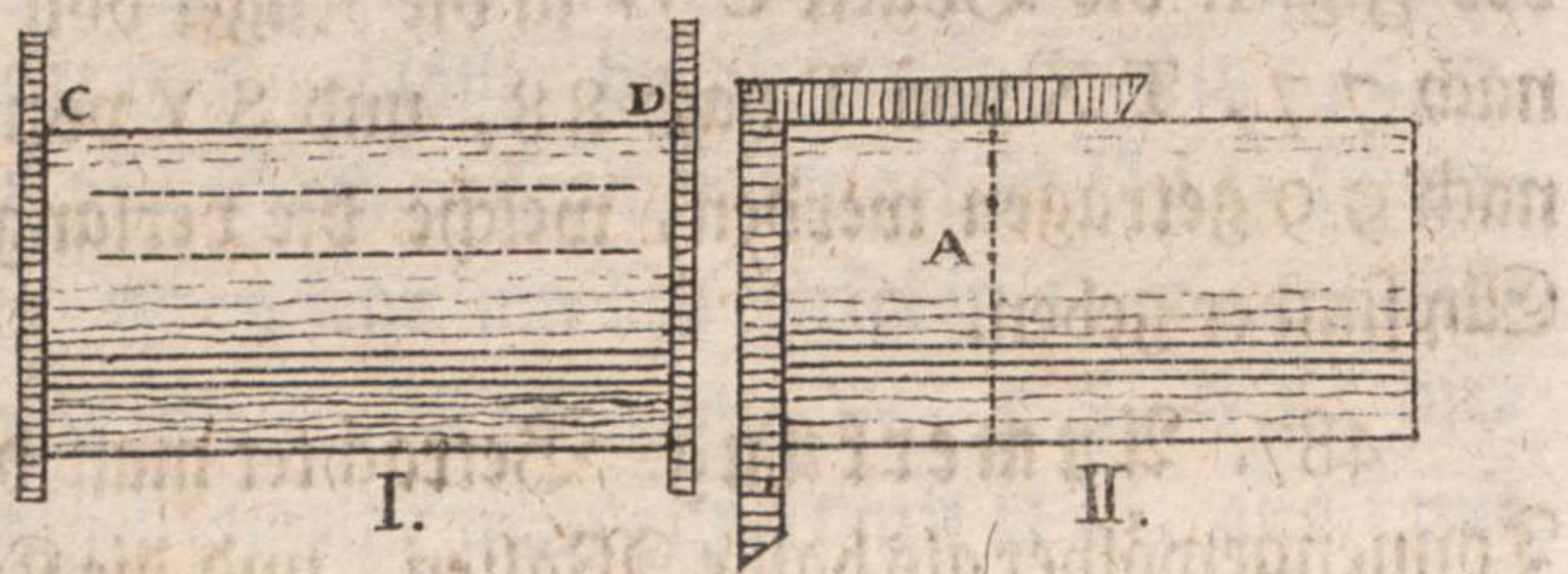


der Fig. I. die Bögen U W in die Kugel von U nach 7 7, T X von T nach 8 8, und S Y von S nach 9 9 getragen werden, welche die verlangte Ellipsimber geben.

487. **Anmerkung.** Betrachtet man die Tonnengewölber als halbe Walzen, und die Kugelgewölber als halbe Kugeln; so wird man finden, daß die Zykloimber und Ellipsimber nicht nur in der Mechanik, sondern auch in der Baukunst bey den Thüren, Fenstern, Stiegen, die in die Gewölber geführt werden, und da, wo sich die Gewölber selbst einander durchschneiden, häufig zum Vorscheine kömmt. Die Durchschnitte der übrigen Körper sind weit seltner, und können zum Theile aus den Bisherigen ermessen werden; daher man sie hier übergehen zu können glaubt.

Von der Beschreibung einiger Linien auf den gebogenen Oberflächen der Körper.

488. Aufgabe. **Mit der Achse gleichlaufende Linien auf die gebogene Oberfläche einer senkrechten Walze zu ziehen.** Fig. I.

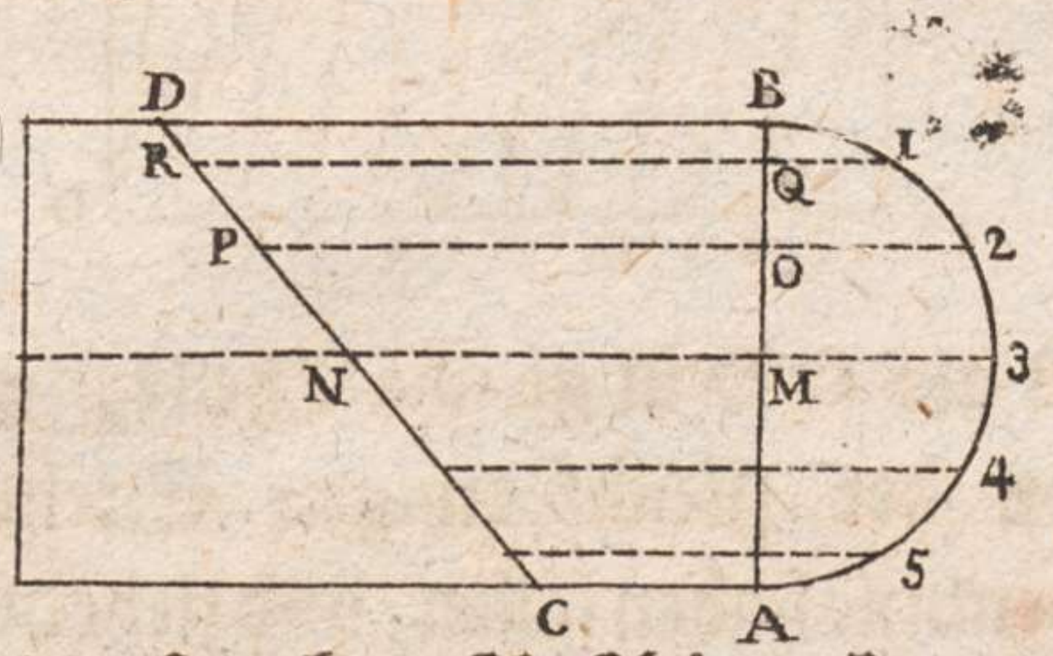


Man lege an die Mittelpunkte der untern und obern Kreisfläche gerade Lattenstücke; richte sie durch Absehen so lange, bis sie sich einander decken, und ziehe darnach eine Linie C D, mit welcher man die übrigen parallel ziehen kann.

489. Aufgabe. **Auf die gebogene Oberfläche einer senkrechten Walze eine, mit der Grundfläche gleichlaufende Kreislinie zu beschreiben.** Fig. II.

Man lege einen Winkelhacken an die Grundfläche; bemerke auf demselben den auf der Walze gegebenen Punkt A, durch welchen die Kreislinie gehen soll; wende dann das Winkelmaaß um die ganze Walze herum, und zeichne so viele Punkte an, als man nöthig zu haben glaubt,

glaubt, welche mit einem biegsamen Lineale zusammen gezogen die verlangte Kreislinie geben.

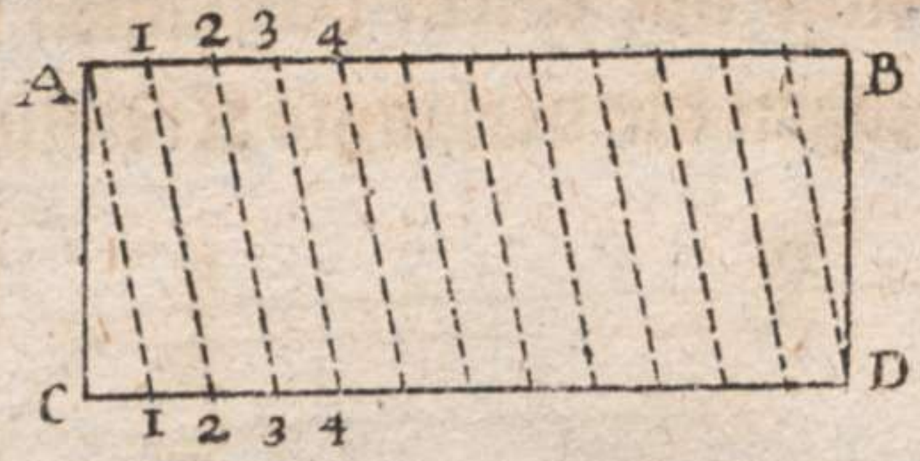


490. **Aufgabe. Auf die gebogene Oberfläche einer senkrechten Walze eine Ellipse zu beschreiben.**

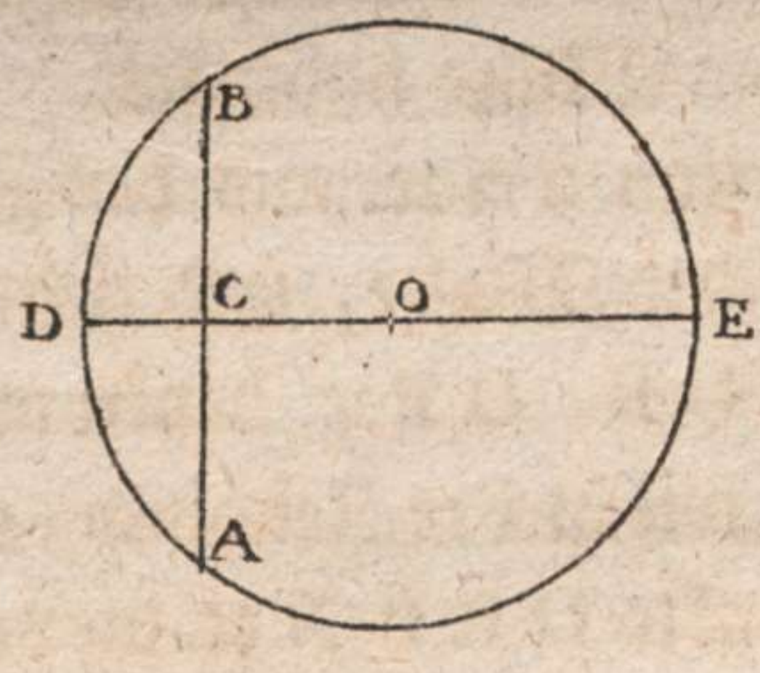
Man zeichne auf einer Fläche den halben Umkreis der Walze A 3 B; theile ihn in beliebige gleiche Theile, ziehe aus den Punkten 1 2 3 2c. die Parallelen 1 R, 2 P, 3 N 2c., und durch diese die Linie D C nach der Lage, welche die Ellipse auf der Walze haben soll. Trägt man nun die Theile 1 2 3 2c. aus der Zeichnung auf den Umkreis der Walze, und zieht auf diese die Linien B D, Q R, O P 2c. denen man die nähmliche Länge, wie in der Zeichnung gibt: so kann durch die Punkte D R P N 2c. die verlangte Ellipse beschrieben werden.

491. **Aufgabe. Die Schraubenlinie auf die gebogene Oberfläche einer senkrechten Walze zu zeichnen.**

Man mache das Netz von der gebogenen Oberfläche A B C D nach Nro. 366; theile so-



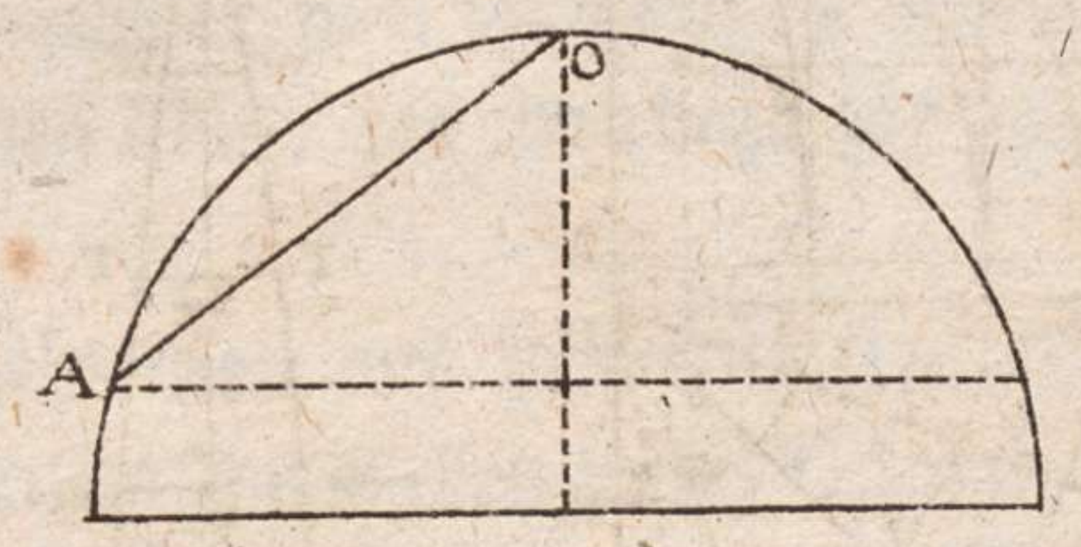
wohl A B als C D in gleiche Theile, welche die Höhe von der gleichförmigen Steigung der Schraubenlinie haben sollen, und ziehe die Transversalen A 1, 1 2, 2 3 ꝛc. Wird dieses Netz um den dazu gehörigen Zylinder gewickelt, so lassen sich darnach die Gänge der Schraube ausarbeiten. Bey Schneckenstiegen, wo die Stuffen ebenfalls gleichförmig steigen, kann man mit einem Dreyecke A 1 C zufrieden seyn, und dasselbe so oft um die Spindel wikeln, als man es für nöthig hält.



492. **Aufgabe.** Den Durchmesser, und den Pol einer kugelförmigen Kuppel zu finden. Fig. I.

Man ziehe auf den Umkreis der Grundfläche mit einer Schnur eine beliebige Sehne A B; theile sie bey C in zwey gleiche theile, und ziehe rechetwinklicht auf C eine andere Schnur E D: so

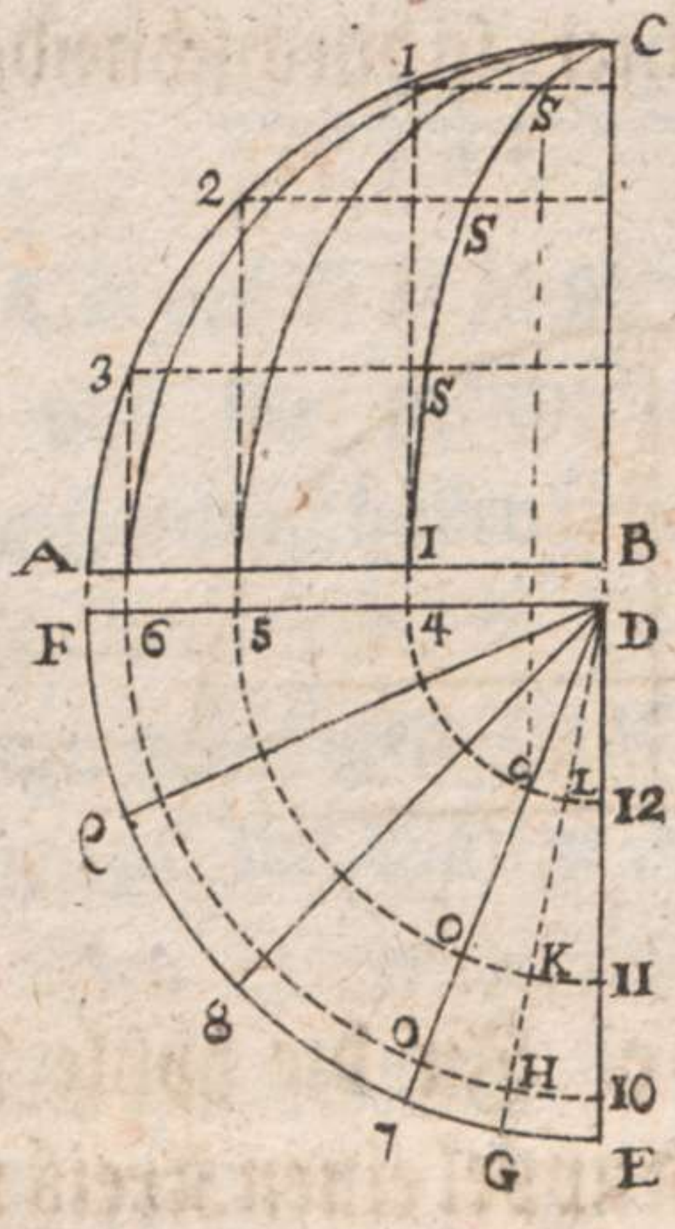
gibt diese den Durchmesser. Wird dieser bey O wieder in zwey gleiche Theile getheilt, und mittelst des Senkbleyes eine Senkrechte aus O in die Höhe der Kuppel errichtet; so durchschneidet diese den Pol der Kuppel.



493. **Aufgabe.** In die hohle Fläche einer kugelförmigen Kuppel einen Kreis parallel mit der Grundfläche durch einen gegebenen Punkt A zu beschreiben. Fig. II.

Man befestige eine Schnur A O an den Pol O; halte an das Ende der Schnur bey A einen färbigen Stift, und führe denselben mit gleicher Spannung in der Kuppel herum. Um Kreise auf die gebogene Oberfläche zu ziehen, müßte auf dem Pole eine senkrechte Stange errichtet, und die Schnur daran befestiget werden.

494. **Aufgabe. Die Lehre zu dem Netze einer kugelförmigen Kuppel zu verfertigen.**

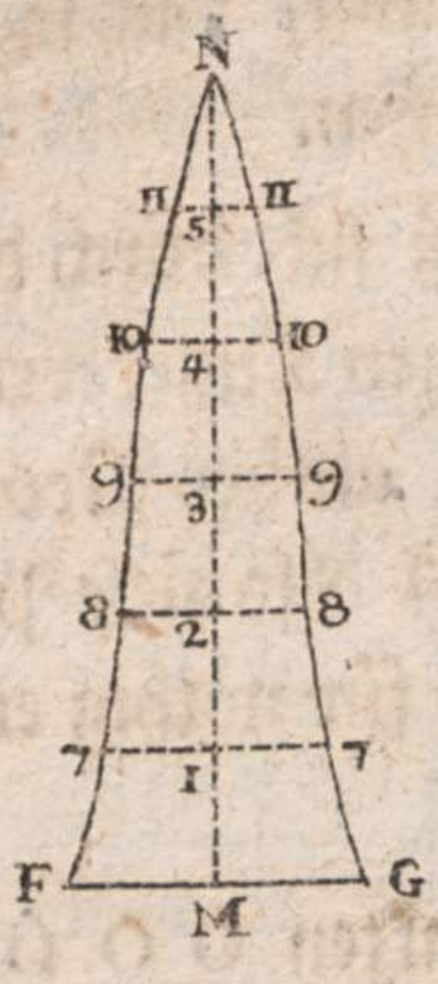


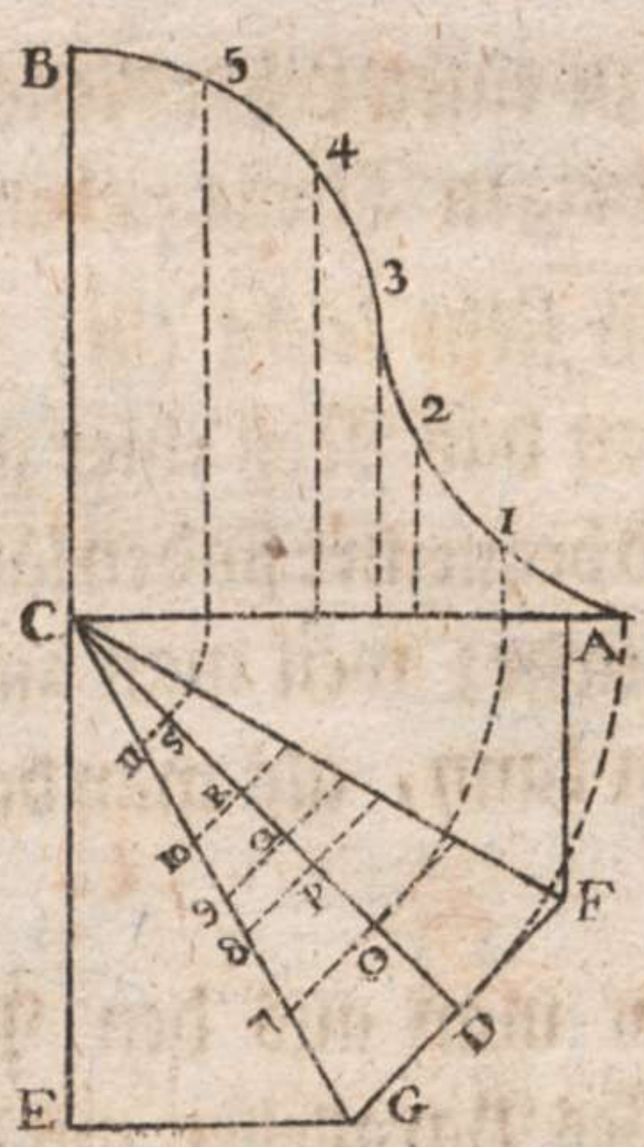
Es sey A B C ein Viertheil einer kugelförmigen Kuppel, wovon D E F die Grundfläche ist; so theile man den Bogen A C in mehrere gleiche Theile; ziehe 3 6, 2 5, 1 4, und aus diesen auf der Grundfläche die Bögen 6 10, 5 11, 4 12; theile ferners den Bogen E F in die gleichen Theile 7 8 9 F, und ziehe die Linie D G, welche 7 E in zwey gleiche Theile zertheilt. Man errichte dann die Senkrechte M N, und trage A 3 von M nach 13, 3 2 von 13 nach 14 ꝛc. so, daß M N die Länge des Bogens A C erhält. Trägt man nun G E von M nach P P, H 10 von 13 nach Q Q, K 11 von 14 nach T T, und L 12 von 15 nach W W; so hat man die einzelnen Punkte von einem Theile E D 7 E oder C I B C der Kup-

pel, der zu einer Lehre dienen kann, nach welcher sich die übrigen Theile ziehen lassen.

Man sieht leicht ein, daß sich durch dieses Verfahren das Netz einer ganzen Kugel weit genauer und bequemer finden läßt, als bey Nro. 377 gezeigt wurde; weil man auf M N so viele Punkte nehmen kann, als man dazu für nöthig erachtet.

Zieht man aus den Punkten O O O des Grundrisses Parallelen mit E C, und aus 1 2 3 Parallelen mit A B; so geben die Durchschnitte S S S die Punkte, durch welche sich der Kreisbogen über 7 D von dem Pole C auf den Umkreis der Grundfläche A B ziehen läßt, wie dieses manchmahl in den geometrischen Zeichnungen der Durchschnitte von Kuppeln vorkömmt. Die Bögen über 8 D, und 9 D werden eben so, wie die über 7 D in den Standriß oder Durchschnitt A B C gebracht. Die Behandlungs-Art der elliptischen Kuppeln, oder der mit überhobenen Bögen, ist ganz die nähmliche, wie man sich durch Vergleichung der beyden Figuren leicht überzeugen kann.

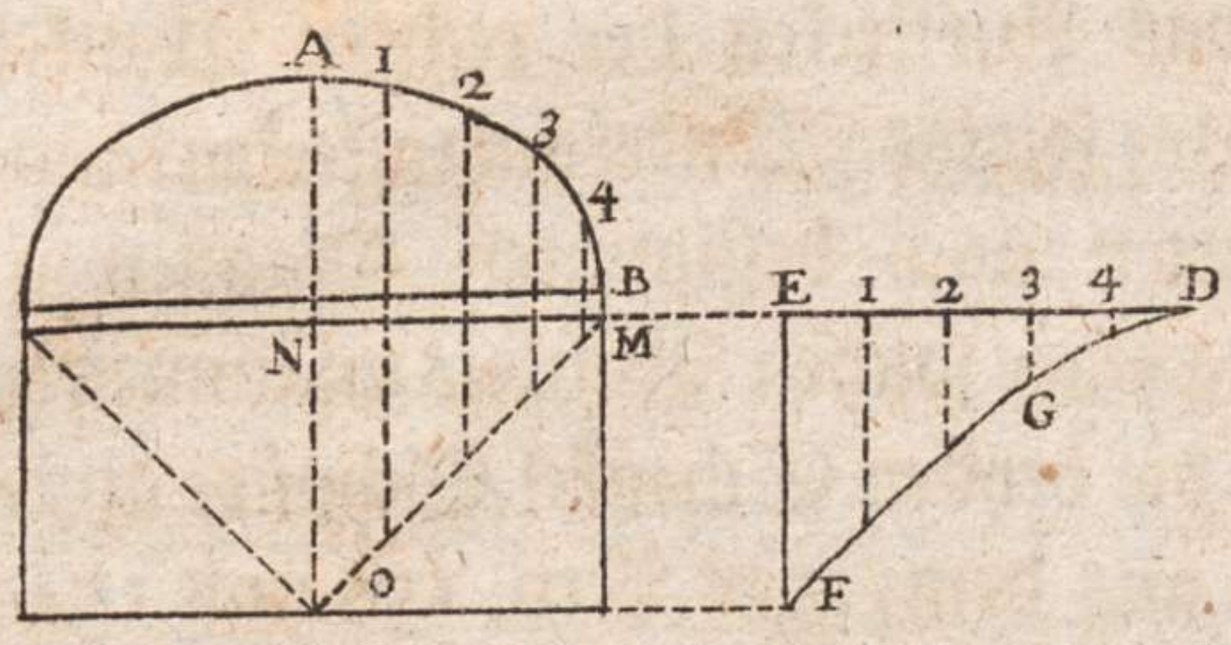




Ist die Grundfläche ein regelmäßiges Vielеck, oder eine simetrische Figur, A F G E C, und die gebogene Oberfläche aus verschiedenen Krümmungen zusammen gesetzt, wie A I 2 3 4 5 B; so werden wieder die Bögen A I, I 2, 2 3 ꝛc. von M nach N getragen, die Linien D F von M nach F u. G, O 7 von I nach 7 7 ꝛc. gesetzt, welche ebenfalls die Punkte zum Netze über den Theil der Grundfläche G C F geben. Diese Netze dienen auch, um die Menge des Materials, welches zur Bedeckung der Kuppeln nöthig ist, daraus zu ermessen.

495. Aus dem bereits Angeführten läßt sich auch begreifen, wie die hohlen Oberflächen verschiedener Gewölber, und anderer Körper die aus verschiedenen krummen Linien zusammen gesetzt sind, sich in einer ausgestreckten Fläche darstellen lassen. Wir wollen hier nur noch die hoh-

te Oberfläche eines offenen Kreutzgewölbes, das einen gedruckten Bogen aus Kreisstücken zum Lehrbogen hat, betrachten.



Man theile den halben Bogen A B in mehrere gleiche Theile 1 2 3 4 ꝛc. und ziehe die Senkrechten auf die Grundfläche, bis an die Gradlinie M O; trage die Theile A 1 2 3 ꝛc. auf die gerade Linie D E; so stellt diese den ausgestreckten Bogen A B vor. Zieht man nun auf D E die Senkrechte E F, und aus den Punkten 1 2 3 4 ꝛc. Parallellen mit E F, denen man die Länge der Senkrechten von der Grundfläche gibt; so können die Endespunkte zusammen gezogen, und dadurch der Flächeninhalt mit hinlänglicher Genauigkeit bestimmt werden, woraus sich auch der Kubikinhalt des ganzen Gewölbes ergibt.

Anmerkungen.

1. In der Aufgabe Seite 79 Nro. 148 wurde das Ausstecken der rechten Winkel gezeigt. Um spitzige Winkel auszustecken kann man drey Latten nach bestimmten Maaßen in der Richtung eines solchen Winkels zusammen legen, und an die beyden Schenkel Schnüre anziehen, wie man aus dem, was Nro. 152 und 154 vom Ausmessen eines solchen Winkels gesagt wurde, leicht abnehmen kann. Bey sehr stumpfen Winkeln werden die Latten nach dem spitzigen Nebenwinkel zusammen gelegt, auch bisweilen zur mehreren Bequemlichkeit mit Nägeln befestiget, welches vorzüglich beym Anlegen regelmäßiger Vieleche, und beym Zusammenlegen der Balken unter einem spitzigen oder stumpfen Winkel gute Dienste leistet. Das Maaß eines auf diese Art zusammen gesetzten Winkels wird von den Werkleuten das Schrögmaaß genannt.

2. Bey der Aufgabe Nro. 161 können die Winkel bey A und B nach der erhaltenen Zeichnung auf die eben gezeigte Art ausgesteckt, und von A vorwärts, von B aber rückwärts eine Linie durch das Gebüsch gehauen werden, welches Verfahren sicherer und bequemer seyn wird, als das bey der Aufgabe angezeigte.

3. In der Aufgabe Seite 99 Nro. 186 kann man sich anstatt des dort angezeigten Instrumen-

tes auch einer blossen gläsernen Röhre von etwa 3 Schuh Länge und $\frac{3}{4}$ Zoll Dicke, welche an den beyden Seiten aufgebogen, und in Holz gefaßt wird, bedienen.

4. Weil nach Seite 221 bey einer Mauer von der Dicke eines ganzen Steines 100 Quadratschuh 600 Steine geben, und also 1 Quadratschuh 6 Steine in sich enthält; so braucht man die Anzahl von Quadratschuhen nur mit 6 zu multipliziren. Eben so verhält es sich bey dem kubischen Inhalte der Mauern, wo die Anzahl von Kubikschuhen mit 5 multiplizirt wird.

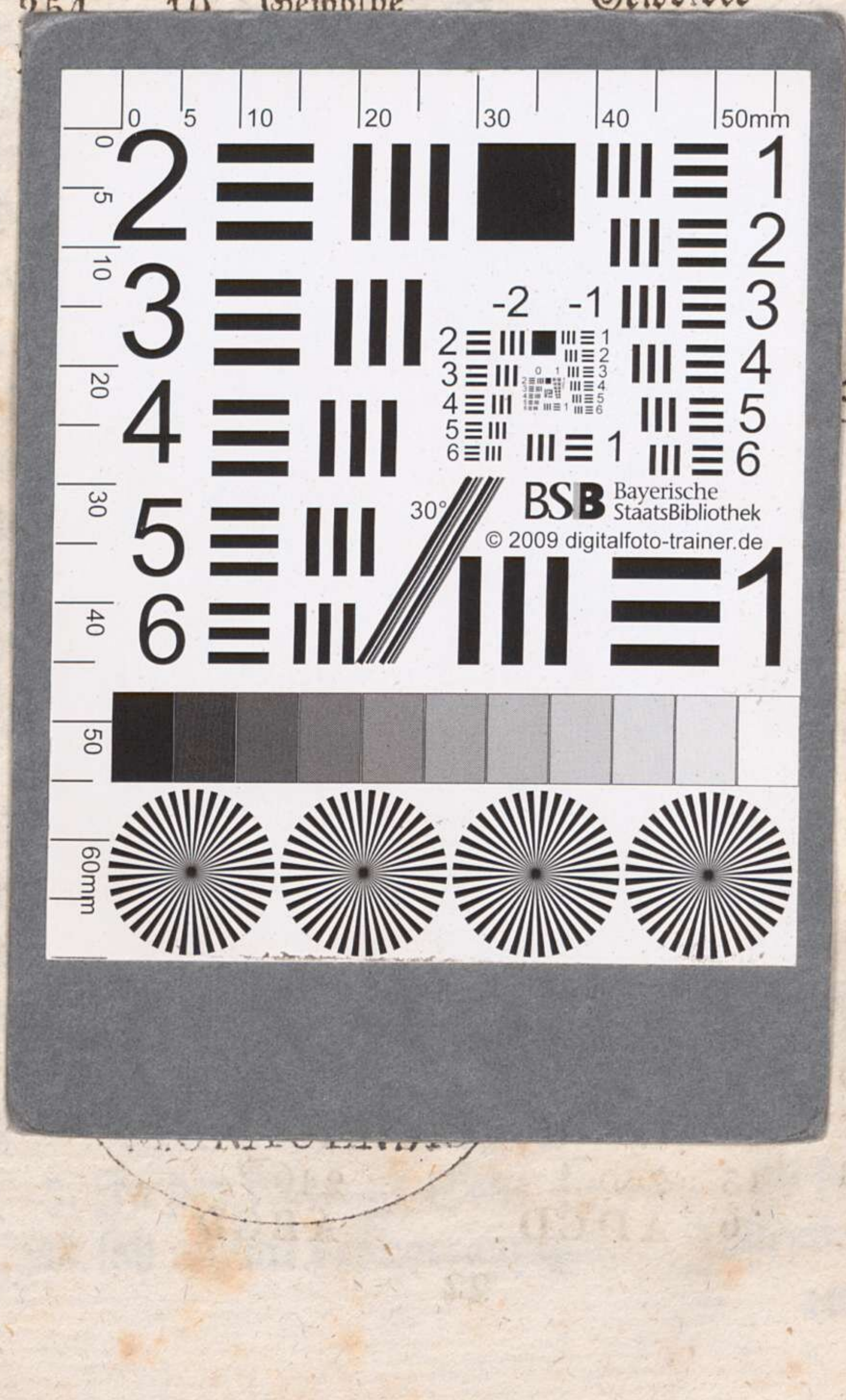
Wesentliche Druckfehler,
welche vor der Durchlesung dieses Werkes müssen verbessert werden.

Seite.	Zeile.	anstatt	lies
24	19	aufzuzeichnen	zu zeichnen
30	10	Theilungs-Punkte	Theilungs-Linien
32	23	654	625
41	23	DE	DB
55	1	= A + D	= B + D
58	6	des Dreyeckes ein ꝛc.	des Dreyeckes A B C ein ꝛc.
81	15	12′	5′
116	28	19	479
117	23	24	34
118	13	240″′	246″′
131	6	A D C D	A B C D

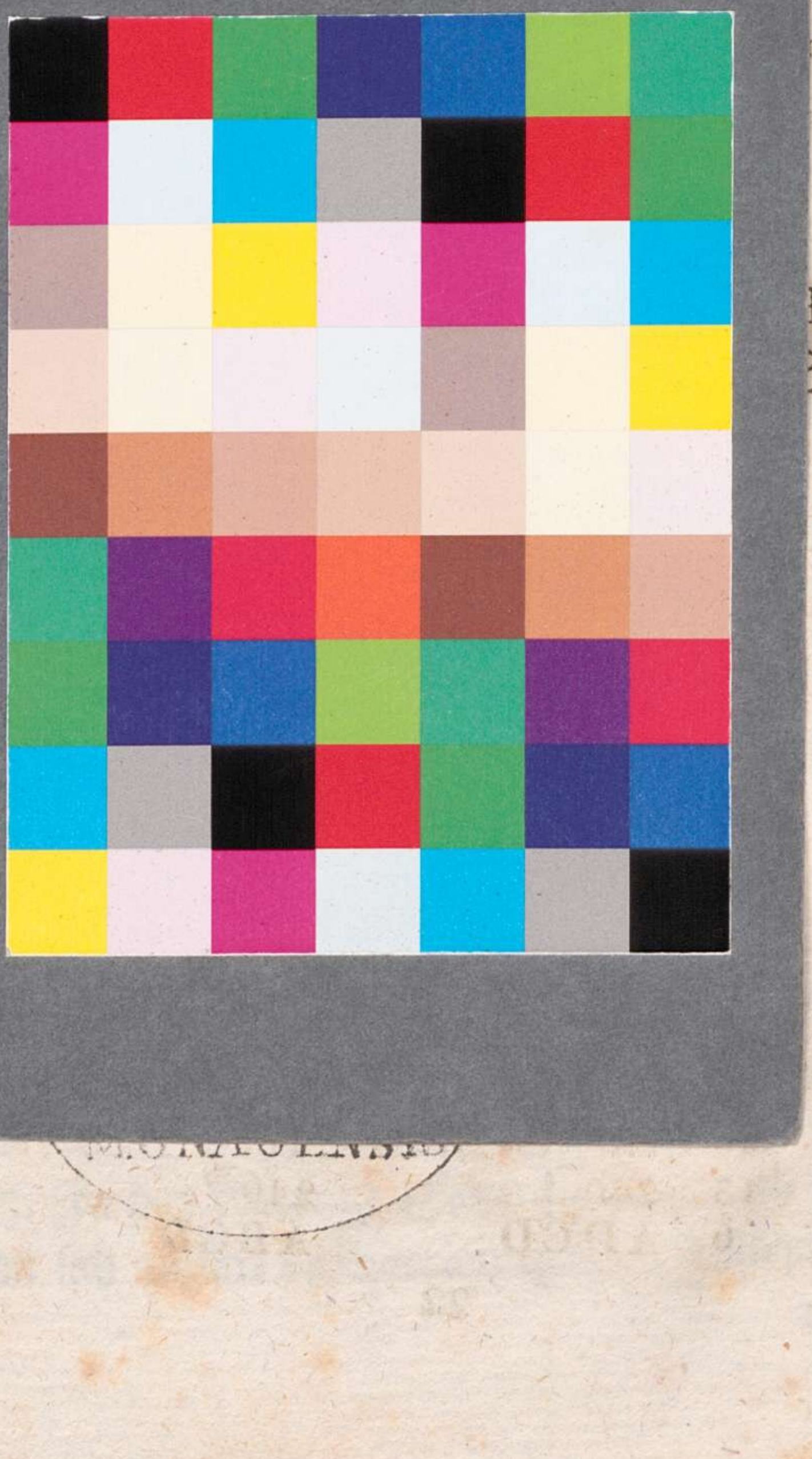
Seite.	Zeile.	anstatt	lies
133	5	40′	20′
148	2	BC = BC	BC × BC
150	13	beyde bey D	beyde bey B
152	11	zwey Theile	zwey gleiche Theile
170	12	Piramide	Pyramide
170	13	Konnus	Konus
209	17	320c″	320c′
225	23	20′	20
254	10	Gewölbe	Gewölber
260	7	Kegelabschnittes	Kugelab chnittes.
260	13	der eliptischen Gewölbe	der ellipti chen Gewölber
260	13	Elipse	Ellipse
269	25	1176000	2176000
282	11	D 8	C 8
287	16	gehört der Strichpunkt hinter G H	
292	4	$\frac{AB \times BC \times 2}{3}$	$\frac{AB \times CD \times 2}{3}$

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Seite.	Zeile.	anſtatt	lies
133	5	40′	20′
148	2	BC = BC	BC × BC
150	13	beyde bey D	beyde bey B
152	11	zwey Theile	zwey gleiche Theile
170	12	Piramide	Pyramide
170	13	Konnus	Konus
209	17	320c″	320c′
225	23	20′	20
254	10	Gewölbe	Gewölber



Seite.	Zeile.	anstatt	lies
133	5	40′	20′
148	2	BC = BC	BC × BC
150	13	beyde bey D	beyde bey B
152	11	zwey Theile	zwey gleiche Theile
170	12	Piramide	Pyramide
170	13	Konnus	Konus
209	17	320c″	320c′
225	23	20′	20
254	10	Gewölbe	Gewölber



MONACENSIS

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Mitterer, Hermann

Anleitung zur Geometrie für Künstler und Werkleute ; mit vorzüglicher Hinsicht auf die Baukunst, und die damit verwandten Künste

München 1809

Lithogr. 70
urn:nbn:de:bvb:12-bsb00109600-3